

Д. Пуарье



ЭКОНОМЕТРИЯ
СТРУКТУРНЫХ
ИЗМЕНЕНИЙ

THE ECONOMETRICS OF STRUCTURAL CHANGE

With Special Emphasis
on Spline Functions

Dale J. POIRIER

1976
NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY
AMSTERDAM—NEW YORK—OXFORD

Д. Пуарье

ЭКОНОМЕТРИЯ
СТРУКТУРНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ
(С ПРИМЕНЕНИЕМ СПЛАЙН-ФУНКЦИИ)

Перевод с английского В. В. МИНЛХИНА
Под редакцией Г. Г. ПИРОГОВА

МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ ЗА РУБЕЖОМ

ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ

1. Ли Ц., Джадж Д., Зельнер А. Оценивание параметров марковских моделей по агрегированным временным рядам.
2. Райфа Г., Шлейфер Р. Прикладная теория статистических решений.
3. Клейнен Дж. Статистические методы в имитационном моделировании. Вып. 1.
4. Клейнен Дж. Статистические методы в имитационном моделировании. Вып. 2.
5. Бард И. Нелинейное оценивание параметров.
6. Болч Б. У., Хуань К. Д. Многомерные статистические методы для экономики.
7. Иберла К. Факторный анализ.
8. Зельнер А. Байесовские методы в эконометрии.
9. Хейс Д. Причинный анализ в статистических исследованиях.

ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ

1. Драймз Ф. Распределенные лаги. Проблемы выбора и оценивания модели.
2. Мостеллер Ф., Тьюки Дж. Анализ данных и регрессия. Вып. 1 и 2.

Редколлегия: А. Г. Аганбегян, Ю. П. Адлер, Ю. Н. Благовещенский, А. Я. Боярский, Н. К. Дружинин, Э. Б. Ершов, Т. В. Рябушкин, Е. М. Четыркин

П $\frac{10805^* - 086}{010(01) - 81}$ 44—81 (С) 0702000000 1702060000

* Второй индекс 10803

© North-Holland Publishing Company, 1976

© Перевод на русский язык, предисловие, «Финансы и статистика», 1981

● ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемая вниманию читателей книга Дейла Пуарье «Эконометрия структурных изменений (С применением сплайн-функций)» вышла в серии «Достижения экономического анализа» книгоиздательской фирмы Норс-Холланд¹. Работы, включенные в эту серию, обычно содержат изложение оригинальных результатов, развивающих методы экономического анализа, и описание примеров применения этих методов. Такой характер имеет и книга Д. Пуарье.

Динамичность процессов экономического развития как отдельных стран, так и межгосударственных экономических отношений на современном этапе остро ставит проблему изучения и прогнозирования таких процессов, задачу разработки адекватных методов их моделирования. Классические приемы и методы моделирования, в том числе и эконометрического, не вполне соответствуют необходимости идентифицировать изменяющиеся системы соотношений по единственным известным реализациям значений показателей изучаемых объектов и процессов. В этих условиях представляют интерес методы выявления и описания устойчивых свойств рассматриваемых изменяющихся объектов путем моделирования соотношений между статистическими данными с помощью специальным образом склеиваемых кусков различных функций, т. е. при помощи сплайнов. Этот класс методов и характеризуется в книге «Эконометрия структурных изменений».

Формально существующий произвол в выборе вида моделирующих функций может и должен быть ограничен четкими теоретическими представлениями об объектах и процессах изменения. Поэтому ключевыми среди используемых в книге Д. Пуарье понятий, помимо строго определенного в тексте термина «сплайн», являются понятия «структура» и «структурное изменение», применяемые в контексте эконометрических построений и с методологических позиций подробно не поясняемые.

В современной науке устанавливается соответствие между инвариантным аспектом исследуемого объекта и понятием структуры. Понятие структуры используется для обозначения совокупности устойчивых связей между основными частями объекта, в которых отражается его целостность и тождественность самому себе, т. е. сохранение основных свойств для широкого спектра внешних и внутренних изменений. Оно обычно соотносится с понятиями системы и организа-

¹ «Contributions to economic analysis». North-Holland Publishing Company.

ции. Структура выражает то, что остается устойчивым, относительно неизменным при различных преобразованиях системы. Организация же включает в себя как структурные, так и динамические характеристики системы, обеспечивающие ее направленное функционирование.

Выявление структуры позволяет рассматривать некоторое множество объектов как совокупность превращающихся друг в друга конкретных вариантов единого абстрактного инварианта².

При эконометрическом подходе к моделированию необходимо четко различать инвариантный аспект моделируемого объекта и его динамический аспект³.

Инвариантному аспекту объекта соответствует структурная часть модели (структура модели). Она представляет собой оператор, преобразующий вход модели в выход. Этот оператор позволяет рассчитывать прогнозные величины. Случайная часть, относительно которой делают вероятностные предположения, используется при определении коэффициентов регулярной части на основе прошлых наблюдений. Структурная часть, в свою очередь, состоит из спецификации зависимостей, определяющих форму структурных уравнений, и статистически оцениваемых структурных коэффициентов.

Через изменения внесистемных инструментальных переменных эконометрическая модель имитирует воздействие на моделируемый объект динамически меняющихся условий его функционирования. Этим, однако, не исчерпываются все возможности воздействия на объект. Воздействия другого типа проявляются в перестройке самого механизма функционирования объекта, с ними связаны решения стратегического характера. Известный советский экономист С. М. Вишнев пишет: «Экономические (плановые и управляющие) решения можно условно разделить на *тактические* и *стратегические*. *Тактические* решения не меняют структуры системы и влекут за собой быстро затухающий эффект; *стратегические* же решения видоизменяют саму структуру, а последствия их сказываются в течение ряда лет и даже десятилетий»⁴.

Для того чтобы иметь возможность имитации обоих типов управляющих воздействий, нужно располагать методикой построения регулярной части модели, достаточно хорошо аппроксимирующей структуру моделируемого реального объекта. Более того, можно утверждать, что любой активный многовариантный прогноз поведения социально-экономического объекта требует знания его структуры и возможностей ее перестройки. В книге Д. Пуарье основное внимание уделяется именно методам построения регрессионных уравнений, задающих модель объекта с изменяющейся структурой.

² Подробнее см.: БСЭ. М., 1976, т. 23, с. 463—464. Философская энциклопедия (М., 1970, т. 5, с. 18—21) определяет структуру как «некоторый аспект системы — единство ее элементов, отношений и целостных свойств, выделенных на основе принципов сохранения или инвариантности».

³ Подробнее см.: П и р о г о в Г. Г., Ф е д о р о в с к и й Ю. П. Проблемы структурного оценивания в эконометрии. М., 1979, с. 51—55, 242—250.

⁴ В и ш н е в С. М. Основы комплексного прогнозирования. М., 1977, с. 12.

Познание реальной структуры моделируемого объекта представляет собой ряд последовательных приближений, все более выявляющих причинно-следственные связи между его элементами, связи, которые объясняют поведение объекта. Цель познания реальной структуры объекта — обеспечение возможности творческой сознательной перестройки его. Успех такой перестройки в соответствии со стоящими перед обществом задачами является конечным критерием, определяющим степень познания реальной структуры.

В структуре социально-экономической системы можно выделить три уровня: производственно-технологическая структура хозяйства, институциональная структура экономики, социальная структура общества.

Эконометрические методы в основном представляют интерес для изучения поведенческих аспектов институциональных систем во взаимосвязи с изменениями в области производственно-технологической структуры.

Системное понимание термина «структура», подразумевающее под структурой инвариантный аспект системы⁵, не является единственным в области социально-экономических наук. Иногда под структурой экономики понимается матрица технологических коэффициентов модели межотраслевого баланса и вектор конечного спроса. Это — частный случай приведенного понимания термина «структура», если с указанными характеристиками модели связывать представление о некоторой инвариантности. Таково понимание структуры, например, американским экономистом В. Леонтьевым⁶. Однако у Леонтьева четко прослеживается стремление свести структурные взаимосвязи к максимально возможному уровню дезагрегации и, более того, к производственно-технологической структуре хозяйства, сознательно оставляя в стороне институциональную структуру экономики. История развития экономической науки и практики за последние 20 лет с очевидностью показала односторонность такого подхода.

Часто термин «структура экономики» употребляется в качестве обозначения соотношения различного рода компонентов, образующих экономический агрегат (например, доля промышленности, сельского хозяйства, транспорта и связи, торговли, заготовок и материально-технического снабжения в произведенном национальном доходе; «структура доходов и расходов семьи» или «географическая структура внешней торговли», «товарная структура внешней торговли» и т. п.). Такое понимание термина также отчасти связано с тем, что сопоставление агрегатов дает правильное представление об экономических процессах лишь с учетом их структуры, т. е. тоже имеет некоторый оттенок инвариантности. Но в общем подобная интерпретация термина «структура» существенно уже той, которая дается в книге Д. Пуарье «Эконометрия структурных изменений» и в нашем предисловии к ней.

⁵ См.: Математика и кибернетика в экономике. Словарь-справочник. М., 1975, с. 549—554.

⁶ См.: Леонтьев В. и др. Исследование структуры американской экономики. М., 1958, с. 7.

В книге Д. Пуарье речь идет о широком, системном подходе к структуре моделируемого объекта. При этом возникают, однако, два важных вопроса: в каких пределах действительно имеет место инвариантность структуры и что должно считаться хорошей аппроксимацией структуры?

Как уже указывалось, познание структуры необходимо для активного творческого воздействия на нее со стороны человека. Следовательно, инвариантность структуры нельзя понимать как ее абсолютную неизменность. С другой стороны, очевидно, что с течением времени происходят структурные изменения не только вследствие активной экономической политики (как об этом упрощения ради говорилось выше), но и в результате самопроизвольных, неуправляемых процессов, что в особенности относится к экономике капиталистических стран. Поэтому у исследователя-эконометрика возникает естественное желание выяснить, имели ли место на периоде наблюдения структурные изменения, и найти им отражение в спецификации модели.

С этой проблемой тесно связан и другой вопрос: должна ли выборка быть аппроксимирована непрерывной или кусочно-непрерывной функцией? Известно, что через n точек можно провести кривую, описываемую полиномом степени $n - 1$, которая дает абсолютно точное приближение к выборке. Но это не значит, что подобная кривая даст наилучший прогноз: воздействие случайного возмущения может привести к тому, что полученное таким образом точное приближение к выборке будет давать прогноз, сильно отличающийся в среднем от фактической реализации. Лучший результат (в смысле математического ожидания прогноза) даст аппроксимация регулярной части структуры с помощью достаточно простой кривой, построенной так, чтобы можно было предполагать распределение плотности вероятностей случайного возмущения симметричным с математическим ожиданием в нуле.

При достаточно большой неоднородности выборки аппроксимация регулярной части структуры с помощью функции с непрерывными производными даст статистически плохие результаты. Одним из путей преодоления этого затруднения является введение в уравнение искусственной переменной, более общим подходом — построение модели с переключением режимов⁷.

Пусть предложена модель, имеющая вид:

$$x_t = \alpha_{11} + \alpha_{12} Y_t + u_t, \text{ если } t \in I_1; \quad (1)$$

$$x_t = \alpha_{21} + \alpha_{22} Y_t + u_t, \text{ если } t \in I_2, \quad (2)$$

где I_1 и I_2 — два множества индексов t .

Допустим, что априорные соображения позволяют определить оба множества наблюдений (например, весь период наблюдений можно разбить на два подпериода — довоенный и послевоенный, резко от-

⁷ Проблемы, связанные с применением в эконометрии искусственной переменной, подробно рассмотрены в работе: K o o u t a n M. Dummy variables in econometrics. Tilburg, 1976, модели с переключающимися режимами — в кн.: G o l d f e l d S., Q u a n d t R. (eds.). Studies in nonlinear estimation. Cambridge, Mass., 1976.

личающиеся друг от друга по структуре экономики). Тогда, введя искусственную переменную z_t , которая принимает значение 1 для первого периода и 0 для второго периода, можно объединить оба уравнения модели следующим образом:

$$x_t = \alpha_{21} + (\alpha_{11} - \alpha_{21}) z_t + \alpha_{22} Y_t + (\alpha_{12} - \alpha_{22}) z_t Y_t + u_t \quad (3)$$

и оценивать (3) обычными методами.

Наиболее простой прием введения искусственной переменной состоит в том, что принимается предположение $\alpha_{12} = \alpha_{22}$, и тогда ее применение равносильно сдвигу кривой регрессии с сохранением угловых коэффициентов.

Рассмотрение системы (1), (2) в качестве модели с переключающимися режимами, где, например, одному режиму соответствует вектор параметров $\alpha_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12})$, а второму — $\alpha_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22})$, допускает не только оценивание параметров в условиях заданных точек структурных разрывов (переключения режимов), но и поиск таких точек, если они неизвестны. Стохастический подход к модели с переключением режимов рассмотрен в разделе 7.2 книги Д. Пуарье.

Сплайн-функции, с которыми знакомит читателя Д. Пуарье, являются естественным обобщением как метода искусственных переменных, так и регрессии с переключениями.

Д. Пуарье определяет полиномиальный сплайн степени n как кусочную функцию, состоящую из кусков многочленов не более чем n -й степени, причем такую, что сама она и все ее производные, до $(n - 1)$ -го порядка включительно, непрерывны. Он дает также эквивалентное определение сплайна, согласно которому полиномиальным сплайном n -го порядка называется n -кратный неопределенный интеграл от ступенчатой функции. Отсюда очевидно, что модель с искусственной переменной (1), (2) можно считать сплайном «нулевого порядка».

Из налагаемого ограничения непрерывности следует, что применение сплайн-функции обеспечивает более адекватное отражение структурных изменений, которые, по мнению Д. Пуарье, в реальности не выступают в форме структурных скачков, что и подчеркивает автор выбором эпиграфа к настоящей книге — «Природа не делает скачков».

Но действительно ли природа не делает скачков? Всегда ли оправданы плавные переходы на новый режим? Мы не беремся ответить на это столь же решительно. В приведенном примере с довоенным и послевоенным периодами гораздо естественнее предположить скачок (между периодами — война). Предположим также, что мы имеем дело с пространственной выборкой, распадающейся на несколько групп, — естественно предположить, что изменения изучаемых зависимостей при переходе от группы к группе происходят скачками, удобно описываемыми с помощью искусственной переменной. Кстати говоря, и сам Пуарье, анализируя в главе 2 деятельность американских аэрокосмических корпораций, использует искусственную переменную для введения в регрессию поправки на индивидуальные особенности корпораций.

Таким образом, нужно отметить, что возможны столь резкие переключения режимов, при которых говорить о плавности переходного

периода не имеет смысла. Но наряду с этим в такой сложной и крупномасштабной системе, как современная экономика, достаточно сильны инерционные процессы. Поэтому в обычных условиях значительная часть переключения режимов вряд ли может рассматриваться в качестве внезапных скачков. Действительно, трудно представить себе, что, например, макроэкономическая производственная функция в некоторый момент времени меняется резким скачком при непрерывном изменении затрат факторов. В этом случае структурный скачок должен скорее всего иметь достаточно плавный характер.

При рассмотрении методов моделирования структурных изменений следует иметь в виду, что на практике эти методы сводятся к изменениям значений коэффициентов или вида уравнений, образующих эконометрическую модель. Такие уравнения задаются различными, как правило, аналитическими функциями, определенными в некоторых областях значений их аргументов. На границах этих областей и наблюдаются нарушения непрерывности таких функций или их производных некоторого порядка. Поэтому уравнения модели, описывающей структурные изменения, которые характерны для исследуемого объекта, естественно задавать с помощью специальным образом подобранных сплайн-функций.

Определенные трудности возникают, если некоторые из переменных — аргументов модели принимают только дискретные или целочисленные значения. Тогда соответствующие функции доопределяются на непрерывных множествах значений аргументов, что позволяет рассматривать их производные и применять технику сплайнов.

Можно представить себе два типа разных аргументов в регрессионной зависимости: качественный (принимающий, например, значения 0 и 1), при котором функция носит ступенчатый характер и применение искусственной переменной вполне оправданно, и количественный, когда аргумент изменяется непрерывно (например, фонды и заработная плата в производственной функции), и тогда использование сплайн-функций обеспечивает гораздо большее разнообразие приемов описания структурных переходов (переключений режимов). Помимо плавности переключения сплайны позволяют стыковку разных спецификаций, для которых используются сплайн-функции разных порядков.

Особое место среди переменных экономической модели занимает время, поскольку, как известно, подавляющая часть таких моделей строится в дискретном времени. Но при дискретном времени скачки в модели возникают в виде платы за эту дискретность независимо от того, наблюдаются ли они в реальности, и они тем сильнее, чем больше шаг модели Δt . При $\Delta t \rightarrow 0$ таких скачков не должно быть. Таким образом, если считать, что каждой модели с дискретным временем соответствует модель с непрерывным временем, то модель с искусственной переменной в большинстве случаев будет неадекватна реальности, давая скачок переменной там, где его в действительности нет. Иными словами, сплайн обеспечивает в такой модели плавную интерполяцию функции между дискретными значениями аргумента t .

Так же как и в случае искусственной переменной, следует различать две разные области применения сплайн-функций, а именно анализ структурных изменений в прошлом периоде и прогноз с учетом структурных изменений. При прогнозе, когда будущие значения объясняющих переменных не выходят за пределы выборки, использование сплайновых регрессий очевидно.

Однако большинство современных эконометрических моделей описывают рост и поэтому связаны с выходом объясняющих переменных за пределы выборки. Простейшим в этом случае является прогноз с помощью последнего куска сплайн-функции, что уже дает выигрыш по сравнению с регрессией, построенной только на наблюдениях периода, соответствующего этому последнему куску. Этот выигрыш достигается тем, что сплайновая регрессия основывается также и на предшествующих наблюдениях.

Наконец, можно неформальным образом поставить куски сплайна в соответствие с некоторыми содержательными условиями функционирования объекта (например, периодом резкого или, напротив, плавного повышения цен на нефть) и, рассматривая сплайн как периодический, использовать для экстраполяции тот или иной кусок сплайна в зависимости от сценарных предположений относительно условий функционирования экономики.

Книга Д. Пуарье охватывает широкий круг вопросов, связанных с применением сплайн-функций в эконометрии, снабжена многочисленными практическими примерами и даже вычислительными программами. В ней рассмотрены проблемы применения линейных, кубических и билинейных сплайн-функций. Особый интерес представляет глава, посвященная кубическим сплайнам, поскольку автор имеет в этой области оригинальные разработки.

В книге также исследуются вопросы, связанные со сплайновой производственной функцией Кобба—Дугласа, равно как и с использованием сплайн-функций для представления весовой функцией распределенного запаздывания. Специальная глава посвящается методам поиска неизвестных точек переключения. Причем в рассмотрение включены и байесовские методы. Есть также глава, посвященная сплайновым функциям в множественной регрессии, но она, к сожалению, невелика по объему и имеет конспективный характер, хотя именно множественная регрессия — один из наиболее важных разделов современной эконометрии.

Заключительная глава непосредственного отношения к оцениванию структурных изменений не имеет, в ней освещен смежный вопрос — сплайновые функции потерь.

Книга Д. Пуарье «Эконометрия структурных изменений» написана несколько неровно — определенная часть материала имеет подчеркнuto обзорный характер. Тема, отраженная в названии, шире, чем реальное содержание книги. Проблема структурных изменений возникает, как правило, для сложных эконометрических моделей, заданных системами уравнений и неравенств. Именно такие модели достаточно адекватно отражают взаимосвязь структуры моделируемого объекта с динамическими процессами, отражающими изменения в

внешней среде, и с принимаемыми решениями. В книге Д. Пуарье вопрос о моделировании процесса структурных изменений рассматривается лишь на уровне отдельных регрессионных уравнений. Более общий случай, когда модель задается системой одновременных уравнений, в настоящее время менее изучен⁸. Однако это первая и пока единственная монография, посвященная новой области эконометрических исследований, где еще много неясного и проблематичного и есть простор для дальнейшей научной работы.

Научно-техническая революция обусловила неизбежность больших структурных изменений экономики. В ряде областей экономическое развитие подошло к некоторым пределам, что вызвало необходимость решения целой группы так называемых глобальных проблем. Достаточно упомянуть проблемы, связанные с физическим истощением природных ресурсов, состоянием окружающей среды, «демографическим взрывом».

В социалистической экономике эти изменения осуществляются сознательно и планомерно, открывая путь для развития на новой структурной основе. Здесь модели с переключениями могут стать инструментом прогнозирования в исследовании определенных стратегических решений.

Для советских исследователей важно иметь в руках инструментарий количественного анализа структурных сдвигов для прогнозирования развития нашей экономики. Одним из важных направлений применения новых эконометрических методов анализа структурных изменений советскими исследователями может стать моделирование глобального развития⁹.

Книга Д. Пуарье дает советскому читателю возможность изучить такие методы и примеры анализа с их помощью процессов, происходящих в капиталистической экономике. Применение этого инструментария в тесном взаимодействии с неформальными, содержательными методами может быть полезно в широкой области практических экономических исследований и должно обусловить его дальнейшее развитие.

*Э. Б. ЕРШОВ
Г. Г. ПИРОГОВ*

⁸ Некоторые результаты по этой проблеме приводятся в главе 2 упоминавшейся книги под редакцией С. Голдфельда и Квандта (см. примечание 7).

⁹ О советских исследованиях в области моделирования глобального развития см., например: Г в и ш а н и Д. М. Методологические проблемы моделирования глобального развития. М., 1977.

Глава 1

● ВВЕДЕНИЕ

Приведенное изречение Альфреда Маршалла служит прекрасным отправным пунктом для начала обсуждения эконометрических моделей структурных изменений¹. Оно указывает на непрерывность — основное свойство всех моделей, рассматриваемых в этой книге. Разумеется, с практической точки зрения всегда оказывается, что вся идея непрерывности в экономических моделях базируется на очень шатком основании, поскольку она предполагает использование переменных величин, которые могут принимать любые, сколь угодно близкие друг к другу значения, что редко имеет место в реальном мире. Тем не менее почти все экономические теории формулируются в терминах непрерывных переменных, а предположение о выполнении такого условия в наших эконометрических моделях стало в большинстве случаев просто частью общего подхода. Поэтому, предполагая, что непрерывность имеет место, разумно считать — если только теория явно не указывает обратного, — что она должна существовать и в точках, где происходят структурные изменения (так же как и во всех остальных).

Рассмотрим, например, структурное изменение в процессе продажи ценных бумаг, вызванное каким-нибудь историческим событием, таким, как война. Одно дело сказать, что начало войны вызвало сдвиг вверх в функциональной зависимости между объемом продажи правительством ценных бумаг и временем, и совсем другое — что в начале войны в объеме продажи правительством ценных бумаг произошел *мгновенный, резкий* скачок. Первая формулировка совместима с весьма правдоподобным объяснением, что начало войны вызвало резкий прилив патриотизма, который привел к более быстрому, чем обычно, росту продажи ценных бумаг. Во втором случае предполагается введение некоторой искусственной переменной, описывающей наш процесс, и тем самым приходится вводить в рассмотрение какой-то таинственный мгновенный скачок в продаже ценных бумаг.

* Природа не делает скачков (лат.). — *Примеч. пер.*

¹ В этой книге структурное изменение понимается в очень широком смысле. Мы будем говорить, что происходит структурное изменение во всех случаях, когда параметры экономической модели изменяются «небольшое» число раз под воздействием внутренних или внешних по отношению к модели сил.

Преимущества непрерывных моделей над моделями с разрывными параметрами проявились, например, во время анализа результатов эксперимента по стимулированию трудовой активности, проведенного в штате Нью-Джерси (New Jersey Graduated Work Incentive Experiment). Как указывает Скидмор [154, с. 43], уже на первых стадиях планирования эксперимента стало ясно, что различные планы введения негативного подоходного налога не следует рассматривать совершенно отдельно друг от друга. Наоборот, следует максимально использовать все то общее, что есть между ними (общие ставки налогообложения и гарантированных выплат). Уоттс [171], в свою очередь, предложил описывать величины ставок налогообложения и гарантированных выплат с помощью непрерывного билинейного сплайна (который будет рассмотрен в главе 4), а отнюдь не используя претерпевающие разрывы искусственные переменные.

Разумеется, модели, в которых применяются разрывные функции, вполне пригодны в тех случаях, когда сдвиг некоторого параметра имеет качественный характер (например, этнический состав или пол). В таких случаях можно воспользоваться известной методикой проверки гипотез, описанной Чоу [31] и Фишером [60]. Если же, однако, рассматриваемая переменная имеет количественный характер, непрерывна, а кроме того, еще и входит в уравнение регрессии, то все изложенные доводы в пользу непрерывности надо считать весьма уместными. В крайнем случае, если все-таки вводится искусственная переменная, то ее стоит связать с некоторой регрессионной для того, чтобы провести проверку на непрерывность, а не просто вслепую пользоваться аддитивным набором искусственных переменных². В разделе 2.2 приведен пример конкретной задачи, в которой неразумное использование одних лишь аддитивных искусственных переменных приводит к серьезным последствиям для полученных результатов.

Эта книга призвана обосновать целесообразность применения при построении моделей структурных изменений так называемых *сплайн-функций*. В простейшем варианте сплайн-функцией называется кусочная функция, отдельные куски которой соединены друг с другом гладким образом. В качестве таких кусков обычно выбираются многочлены, а условие гладкости формулируется в терминах непрерывности самого сплайна и его производных. Сформулируем точное определение.

Определение 1.1. Полиномиальным сплайном степени n называется составленная из кусков многочленов степени не выше n кусочно-полиномиальная функция, такая, что сама она и все ее производные до порядка $n - 1$ включительно непрерывны³.

² Пусть, например, $y = \beta_0 + \beta_1 x$ и в фиксированной точке оси абсцисс $x = \bar{x}_1$ происходит структурное изменение. Положим тогда $z = 1$ при $x > \bar{x}_1$ и $z = 0$ в противном случае. После этого можно провести оценивание коэффициентов уравнения $y = \beta_0 + \beta_1 x + \alpha_0 z + \alpha_1 (xz)$ и проверить условие непрерывности $\alpha_0 + \alpha_1 \bar{x}_1 = 0$.

³ Если эт не приводит к недоразумениям, мы будем опускать слова «полиномиальный» и «степени n », а функцию такого вида будем называть просто сплайном. Если $(n - m)$ -й производной разрешается быть разрывной (где $1 \leq m < n$), то в таком случае говорят, что сплайн имеет дефект m . Сплаины дефекта 1 называются «простыми».

Можно дать эквивалентную формулировку этого понятия, а именно можно сказать, что полиномиальным сплайном степени n является любой n -кратный неопределенный интеграл от произвольной ступенчатой функции⁴. Ясно, что многочлен n -й степени является частным случаем сплайна n -й степени, а именно это такой сплайн n -й степени, n -я производная которого тоже непрерывна.

Хотя с математической точки зрения понятие сплайна довольно простое, математическая теория сплайнов появилась относительно недавно. Обычно в качестве даты ее рождения указывают 1946 г., когда вышла основополагающая работа Шенберга [147]. Тем не менее стоящую за математическим понятием сплайна идею можно проследить в устройстве инструмента, давно применяемого в чертежном деле⁵. Уже много лет для того, чтобы через несколько фиксированных точек провести гладкую кривую, в чертежном деле используются длинные тонкие полоски из гибкого материала. Эти полоски, или, как их называют, сплайны, удерживаются на месте с помощью специальных грузиков, закрепленных в различных точках сплайна. Математическая сплайн-функция похожа на чертежный сплайн в том смысле, что ее график напоминает кривую, проведенную с помощью механического сплайна.

Несмотря на то, что сплайны были введены Шенбергом в 1946 г., до 60-х годов они применялись мало. Однако с тех пор литературы на эту тему стало значительно больше, и сейчас в теории приближений сплайнам уделяется много внимания. Более того, количество примеров успешного применения сплайнов (в особенности при художественном конструировании в судостроительной, авиакосмической и автомобильной промышленности) уже таково, что вполне оправдывает следующее утверждение: «Сплайн-функции в частности и кусочно-полиномиальные функции вообще являются ныне наиболее успешно применяемыми в целях приближения функциями. Они просты в обращении при работе на ЭВМ и отличаются большой гибкостью. Поэтому сплайн-функции особенно удобны для работ по приближению экспериментальных данных или для экспериментов по художественному конструированию»⁶.

Отметим, что целесообразность применения сплайнов для представления с их помощью структурных изменений имеет совсем другие корни по сравнению с традиционным использованием сплайнов в теории приближений. В последнем случае сплайны применяются в качестве «инструмента» для проведения кривых, с его помощью можно приближать функции, которые сами совершенно определенно сплайнами не являются. Здесь важно добиться достаточной степени точности при интерполяции и прогнозе, а не заниматься оцениванием параметров соответствующей функциональной зависимости. Хотя в экономике существует целый ряд задач, главной целью которых является прогноз (и стало быть, в которых заманчиво выбрать в каче-

⁴ См.: Гревилл [79, с. 1].

⁵ См. рассказ об этом в работе Алберга, Нилсона и Уолша [2].

⁶ Де Боор и Райс [42, с. 7].

стве аппроксимирующих сплайн-функции), в этой книге мы таких приложений касаться не будем. Скорее, наша основная задача — рассмотреть применение сплайнов в тех случаях, когда из априорных экономических соображений можно заключить, что процесс описывается непрерывной кусочной функцией (именно в ее кусочном характере находят отражение структурные изменения), и когда есть необходимость в эмпирической проверке наличия структурных изменений.

Рассматривая структурные изменения, мы одновременно убеждаемся в том, какую важную роль в экономике играют кусочные функции. Например, часто приходится сталкиваться с ситуацией, когда разумно рассматривать y как линейную функцию от x над некоторой частью области определения x , но такая линейность может не иметь места на всей области определения величины x . Иногда, чтобы аппроксимировать такую нелинейную по x зависимость, пользуются некоторым многочленом. Однако, по-видимому, не менее разумно попытаться представить y в виде кусочно-линейной функции от x . Такой подход в сочетании с доводами, изложенными в пользу непрерывности, и приводит к линейным сплайн-функциям. Более того, мы получаем таким образом естественную формализацию понятия структурного изменения, поскольку если y есть кусочно-линейная функция от x , то те точки, в которых линейная функция меняет свой вид, в определенном смысле можно считать точками структурных изменений.

Одно из преимуществ такого подхода к построению моделей состоит в том, что внутри каждого отрезка зависимость между y и x имеет очень простой вид и, следовательно, без труда поддается анализу. Так, например, в главе 5 рассматривается сплайновая производственная функция Кобба—Дугласа, которая ослабляет обычное требование к производственной функции с тем, чтобы ее параметр отдачи от масштаба не зависел от уровня затрат факторов. Это делается следующим образом. Берется кусочная производственная функция Кобба—Дугласа, для которой отдача от масштаба может изменяться при переходе от одной области затрат факторов к другой (с одним лишь условием общей непрерывности). Поскольку внутри каждого куска функция имеет вид обычной функции Кобба—Дугласа, локальный анализ ситуации проводится очень просто, так как свойства такой производственной функции (например, форма линий уровня) хорошо известны.

В последние годы количество примеров успешного применения сплайн-функций к экономическим моделям резко возрастает. Например, в ряде статей двух недавно вышедших под редакцией Уоттса и Риса сборников [173], [174] сплайн-функции использованы для анализа результатов уже упоминавшегося эксперимента по стимулированию трудовой активности. Разнообразие возможностей их применения (например, сплайн-функциями были представлены такие величины, как возраст, уровень образования, ставка налогообложения и ставка гарантированных выплат) свидетельствует о растущей популярности сплайн-функций среди специалистов. Однако список авторов, ко-

торые применяли сплайны при решении конкретных задач, вовсе не исчерпывается автором этой книги и его бывшими коллегами по институту исследования вопросов бедности при университете штата Висконсин.

Например, в 1961 г. Хаутеккер заметил, что получающиеся при минимизации квадратичной функции полезности «кривые Энгеля» являются не прямыми, а «непрерывными ломаными, составленными из отрезков прямой». Несколькими позднее кубический сплайн был использован Бартом и Крафтами [14] при вычислении эластичности процентной ставки в задаче о спросе на деньги. Маккаллоу, изучая структуру процентных ставок по срочности ссуд, в своих двух работах [108], [109] использовал представление дисконтирующей функции с помощью квадратичного и кубического сплайнов⁷.

Шенберг [149] и Уаба [167], [168], хотя они и занимались моделями несколько иного типа, откликнулись на призыв Боневой, Кендэла и Стефанова [22] и исследовали вопрос о применении сплайн-функций для оценивания функции плотности. Несмотря на то, что такая методика еще не нашла широкого применения, Спан [155] уже использовал кубические сплайны для аппроксимации функции, описывающей распределение населения Западной Германии по уровням дохода. Для того чтобы описать «структурное изменение», которое претерпевает эта функция при переходе к группам с самым высоким доходом, Спан «срастил» кубический сплайн с отрезком экспоненты.

Чтобы не злоупотребить вниманием читателя, перечисляя другие работы, в которых сплайны нашли применение, мы на этом остановимся. Будем надеяться, нам удалось убедить читателя в том, что потенциальные возможности применения сплайн-функций в задачах экономического моделирования структурных изменений почти безграничны. В последующих главах мы попытаемся проиллюстрировать приложения сплайн-функций гораздо более подробно.

Дальнейшее содержание этой книги таково. В главе 2 обсуждаются линейные сплайны. При этом особое внимание уделяется различным параметризациям и методике проверки гипотез о наличии структурных изменений. Для иллюстрации этих понятий в главе 2 кратко излагается работа Пуарье и Гарбера [132], в которой рассматриваются вызванные войнами структурные изменения зависимости приведенной нормы прибыли различных авиакосмических фирм от времени.

В главе 3 мы, следуя работе [127], подробно рассмотрим понятие кубического сплайна. Далее в ней, кроме всего прочего, описываются периодические кубические сплайны и освещается вопрос о граничных условиях в случае непериодических кубических сплайнов. Там же проведен эмпирический анализ вызванного войной структурного изменения в модели «обучения на опыте» из работы [127]. Наконец, в этой главе обсуждается свойство наилучшего приближения, которым обладает кубический сплайн, и показано, как этим свойством

⁷ Помимо этих и многих других работ, ссылки на которые имеются в этой книге, см. также [8], [11], [23], [157], [176].

Можно воспользоваться в теории денежного обращения для выбора оптимальной траектории роста объема денежной массы.

В главе 4 рассматриваются билинейные сплайны и методика главы 2 тем самым распространяется на двумерный случай. В ней, следуя работе [129], мы приводим математическое определение билинейной сплайна, а затем излагаем методику проверки гипотез о наличии структурных изменений различных типов. В эту же главу включен эмпирический анализ структурных изменений в зависимости ставок заработной платы определенной категории населения (негритянское население мужского пола) от возраста и уровня образования. Этот анализ основан на работах [129] и [133].

Глава 5 посвящена сплайнам Кобба—Дугласа, и в ней мы, следуя работе [130], рассмотрим их применение как в качестве производственных функций, так и в качестве функций полезности. В нее также включено описание эмпирического приложения сплайна Кобба—Дугласа к задаче о наличии структурных изменений в производстве электроэнергии.

Четыре последние главы этой книги базируются на неопубликованном материале. В главе 6 рассматривается вопрос об использовании линейных и кубических сплайнов в моделях с распределенным запаздыванием. Целесообразность такого их применения обусловлена тем, что кубические сплайны обладают свойством наилучшего приближения (которое рассматривается в разделе 3.12), а также тем, что и линейные, и кубические сплайны могут иметь плоские участки, что позволяет проводить проверку величины запаздывания (в рамках одной модели). С этой точки зрения прекращение эффекта запаздывания можно рассматривать как некоторое структурное изменение в форме зависимости величины коэффициентов при запаздывающих членах от самой величины запаздывания. Глава 6 содержит также практическое приложение к задаче, в которой средняя величина процентного дохода по корпоративным облигациям выражается с помощью сплайнового запаздывания через величину курса коммерческих бумаг.

В главе 7 кратко изложены различные способы оценивания моделей с неизвестными точками структурных изменений. Такие вопросы уже рассматривались в литературе по эконометрии, биометрике и статистике. Наше изложение касается и классического, и байесовского подхода, причем мы обращаем особое внимание на проверку наличия структурных изменений.

В главе 8 рассматриваются различные вопросы, возникающие при применении сплайнов в рамках множественной регрессии. Среди них — выбор параметризации, проблема мультиколлинеарности, приложение к моделям с зависящими от времени параметрами, проблема выбора узлов. Кроме того, чтобы облегчить и ускорить практическое применение рассматриваемой методики, в разделе 8.6 приведены соответствующие программы на Фортране.

В первых восьми главах структурные изменения рассматриваются в рамках различных регрессионных моделей. В противоположность этому в последней главе (глава 9) структурные изменения исследуют-

ся с точки зрения функции потерь. При этом важный тип структурного изменения возникает из-за асимметрии функции потерь (например, перевыполнению и невыполнению целевых показателей могут соответствовать потери различного вида). В главе 9 описываются абстрактные модели, в которых используются асимметричные функции потерь, а также исследуется робастность обычной квадратичной функции потерь относительно асимметрии. Особый интерес представляет асимметричная модель частичной адаптации, которая строится в разделе 9.7 на базе асимметричной функции потерь. В соответствующую регрессионную модель входит линейный сплайн с неизвестным узлом, так что эта модель служит связующим звеном между главой 9 и предшествующими главами.

2.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Определение 2.1. Будем называть *сеткой* произвольное множество точек оси абсцисс $\Delta = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{k-1}\}$, где $\bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \dots < \bar{x}_{k-1}$. При этом будем называть точки x_j ($j = 1, 2, \dots, k-1$) *внутренними узлами* или просто *узлами*. Будем говорить, что y является *линейным сплайном* $S_\Delta(x)$ над Δ тогда и только тогда, когда y есть непрерывная кусочно-линейная функция

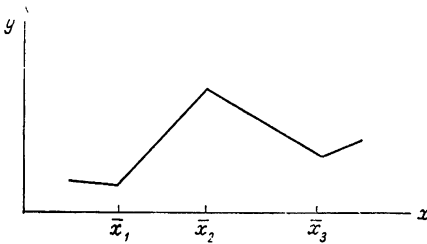


Рис. 2.1. Линейный сплайн с тремя узлами

от x , график которой состоит из k прямолинейных отрезков, расположенных над k интервалами $(-\infty, \bar{x}_1]$, $[\bar{x}_1, \bar{x}_2]$, \dots , $[\bar{x}_{k-1}, \infty)$ соответственно.

Пример линейного сплайна над сеткой $\Delta = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ приведен на рис. 2.1. Входящие в Δ узлы иногда называются также *точками перелома* или, по терминологии Хадсона [98], *точками стыковки*.

Конечно, можно было бы задавать кусочно-линейную кривую набором некоторых искусственных переменных, при изменении которых изменялись бы угловые коэффициенты и высота отрезков графика над соответствующими интервалами. При этом необходимо было бы потребовать выполнения дополнительного условия на эти переменные, которое обеспечило бы непрерывную стыковку отрезков в узлах. Удобнее, однако, задавать модель таким образом, чтобы требование непрерывности выполнялось автоматически, без дополнительных условий на параметры.

Например, сплайн можно задавать его значениями y_1, y_2, \dots, y_{k-1} во внутренних узлах $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{k-1}$, плюс его значения в двух *концевых узлах* $\bar{x}_0 < \bar{x}_1$ и $\bar{x}_k > \bar{x}_{k-1}$ ¹. Пользуясь уравнением прямой, проходящей через две данные точки, уравнение j -го отрезка можно

¹ Эти концевые узлы будут играть важную роль при рассмотрении кубических сплайнов (в главе 3).

записать в следующем виде:

$$S_{\Delta}(x) = y_{j-1} + \frac{y_j - y_{j-1}}{\bar{x}_j - \bar{x}_{j-1}} (x - \bar{x}_{j-1}) = \left[\frac{y_{j-1} \bar{x}_j - y_j \bar{x}_{j-1}}{\bar{x}_j - \bar{x}_{j-1}} \right] + \left[\frac{y_j - y_{j-1}}{\bar{x}_j - \bar{x}_{j-1}} \right] x, \quad (1)$$

где $\bar{x}_{j-1} \leq x \leq \bar{x}_j$.

Хотя параметризация (1) иногда полезна (см., например, раздел 6.3) и запись (1) очень похожа на параметризацию кубического сплайна, которая будет введена в главе 3, опыт показывает, что часто удобнее пользоваться другой параметризацией. Определим k новых переменных следующим образом:

$$\omega_1 = x;$$

$$\omega_j = (x - \bar{x}_{j-1})_+ = \max(x - \bar{x}_{j-1}, 0) = \begin{cases} x - \bar{x}_{j-1}, & x > \bar{x}_{j-1} \\ 0, & x \leq \bar{x}_{j-1} \end{cases}, \quad (2)$$

где $j = 2, 3, \dots, k$. Баррондэйл и Янг [12] называют функции вида (2) *элементарными сплайн-функциями*. Теперь линейный сплайн $S_{\Delta}(x)$ можно записать так:

$$S_{\Delta}(x) = \beta_0 + \beta_1 \omega_1 + \beta_2 \omega_2 + \dots + \beta_k \omega_k. \quad (3)$$

Коэффициент β_1 представляет собой коэффициент наклона (угловой коэффициент) сплайна над первым интервалом, а каждый из следующих коэффициентов β_j ($j = 2, 3, \dots, k$) дает изменение углового коэффициента при переходе от интервала $(j-1)$ к интервалу j соответственно. Таким образом, первая производная линейного сплайна является ступенчатой функцией, которая в узлах претерпевает скачки, равные по величине значениям коэффициентов β_j ($j = 2, 3, \dots, k$). Полный коэффициент наклона сплайна над j -м интервалом есть $(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_j)$.

Выражение (3) удобно использовать в качестве детерминированной части обычной регрессионной модели (т. е. полагая $S_{\Delta}(x) = E(y|x)$), поскольку, во-первых, оно линейно по неизвестным параметрам регрессии $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$, во-вторых, отсутствуют ограничения на эти параметры, в-третьих, новые переменные $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ можно легко получить, пользуясь лишь стандартными процедурами, имеющимися в обычных пакетах регрессионных программ, и, в-четвертых, при классических предположениях о возмущающем члене соответствующее β_j ($j = 2, 3, \dots, k$) t -распределение дает статистическую значимость изменения коэффициента наклона при переходе от $(j-1)$ -го интервала к j -му. Если $\beta_j = 0$, то коэффициенты наклона над $(j-1)$ -м и j -м интервалами одинаковы и тот факт, что β_j не обращается в нуль, вполне согласуется с представлением о том, что в точке \bar{x}_{j-1} происходит «структурное изменение» какого-то типа.

Интересно отметить связь линейного сплайна с двумя обычными часто встречающимися функциями регрессии. Поскольку многочлен

первой степени есть линейный сплайн, в котором $\beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_k = 0$, стандартная «линейная по x » регрессионная модель является частным случаем линейного сплайна. Часто используемая в регрессионном анализе разрывная кусочно-линейная модель есть предельный случай линейного сплайна, когда один из узлов стремится к соседнему. Это показано на рис. 2.2 в случае, когда \bar{x}_1 стремится к \bar{x}_2 , и, таким образом, длина второго интервала стремится к нулю².

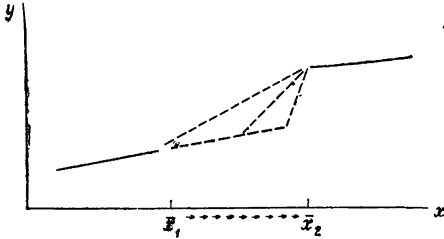


Рис. 2.2. Предельный случай, когда один из узлов линейного сплайна стремится к другому

Иногда полезно видоизменить представление (3), перенеся начало координат в один из узлов, скажем в узел \bar{x}_j . Такой вариант представления может оказаться полезным в том случае, когда $(j + 1)$ -й интервал соответствует некой базисной ситуации, от которой целесообразно отсчитывать структурные

изменения. Такое преобразование легко проводится без потери желательных свойств представления (3) следующим образом. Представим y в виде

$$y = \gamma_0 + \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + \dots + \gamma_k w_k + \varepsilon,$$

где новые переменные w_i определяются так:

$$w_i = (x - \bar{x}_i)_- = \min(x - \bar{x}_i, 0) = \begin{cases} x - \bar{x}_i, & x < \bar{x}_i \\ 0, & x \geq \bar{x}_i \end{cases} \quad (4)$$

при $i = 1, 2, \dots, j$, тогда как при $i = j + 1, j + 2, \dots, k$

$$w_i = (x - \bar{x}_{i-1})_+.$$

При $i \geq j + 1$ коэффициент наклона сплайна над i -м интервалом равен $(\gamma_{j+1} + \gamma_{j+2} + \dots + \gamma_i)$, а при $i \leq j$ коэффициент наклона над i -м интервалом есть $(\gamma_i + \gamma_{j+1} + \dots + \gamma_j)$.

Процедура оценки параметров очень проста в обоих случаях при использовании представления как (3), так и (4). Достаточно лишь применить стандартную технику линейной множественной регрессии. Далее, хотя в записи формул (3) и (4) этого раздела мы и опустили все прочие переменные, не представляет никакого труда вновь включить их в рамках множественной регрессии. В следующем разделе содержится конкретный пример такого подхода. Этот пример интересен сам по себе, а также служит хорошей иллюстрацией рассмотренных выше понятий.

² В предельном случае, когда $x_1 \rightarrow x_2$, сплайн называется обобщенным. Вообще, обобщенные сплайны степени n получаются, когда один узел стремится к другому, и, следовательно, они имеют разрывы в производных не только n -го порядка.

2.2. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К ОЦЕНКЕ НОРМЫ ПРИБЫЛИ В АВИАКОСМИЧЕСКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ за 1951—1971 гг.

Для того чтобы дать представление о том, как можно использовать линейные сплайны для анализа структурных изменений в зависимости некоторой переменной от времени, мы кратко изложим в этом разделе результаты недавней работы Пуарье и Гарбера [132]. В этой работе изучается поведение нормы прибыли нескольких крупных фирм авиакосмической промышленности, большая часть производства которых обеспечивается правительственными контрактами, за период 1951—1971 гг. Основной задачей авторов была проверка полученного Агапосом и Галлауэем [1] результата, в соответствии с которым война во Вьетнаме не оказала благоприятного воздействия на норму прибыли рассматриваемых фирм. Поскольку имеются серьезные (связанные с накоплением опыта) соображения в пользу явного включения времени в качестве параметра в нашу модель, авторы используют зависящий от времени линейный сплайн, а в качестве внутренних узлов выбраны конец войны в Корее (1954 г.) и начало войны во Вьетнаме (1965 г.).

Рассматривается следующая модель:

$$y_{it} = \beta_0 + \sum_{j=1}^{14} \beta_j x_{it,j} + \varepsilon_{it}, \quad i = 1, 2, \dots, 9, \quad t = 1, 2, \dots, 21, \quad (5)$$

где зависимыми переменными являются величины y_{it} ; y_{it} — норма прибыли i -й фирмы в год t ³.

Следующие три независимые переменные представляют собой выраженные в миллионах долларов правительственные расходы (для всех i):

$x_{it,1}$ — закупки министерства обороны в год t в постоянных ценах;

$x_{it,2}$ — расходы министерства обороны на научные исследования и разработки в год t в постоянных ценах;

$x_{it,3}$ — расходы на космические исследования в год t в постоянных ценах.

Следующие восемь искусственных переменных определяют, о какой фирме в каждом конкретном уравнении идет речь (для всех t)⁴:

$x_{it,4} = 1$ — для фирмы «Боинг», в противном случае — нуль;

$x_{it,5} = 1$ — для фирмы «Дуглас», в противном случае — нуль;

$x_{it,6} = 1$ — для фирмы «Дженерал Дайнэмикс», в противном случае — нуль;

$x_{it,7} = 1$ — для фирмы «Макдоннелл», в противном случае — нуль;

³ Величина $t = 1$ соответствует 1951 г.

⁴ Эти искусственные переменные для каждой конкретной фирмы изменяют на определенную величину свободный член уравнения регрессии, т. е. с их помощью учитывается отклонение свободного члена от некоторого базисного значения, которое выбрано соответствующим фирме «Локхид». Фирмы, претерпевшие в течение периода 1951—1971 гг. крупные организационные изменения (слияние или взаимное поглощение), а именно «Макдоннелл—Дуглас» (1966) и «Норд Америкэн Рокуэлл» (1967), рассматриваются отдельно от своих предшественников, и поэтому им приписываются свои собственные искусственные переменные.

$x_{it,8} = 1$ — для фирмы «Норд Америкэн Авиэйшн», в противном случае — нуль;

$x_{it,9} = 1$ — для фирмы «Аэроджет Дженерал», в противном случае — нуль;

$x_{it,10} = 1$ — для фирмы «Макдоннел—Дуглас», в противном случае — нуль;

$x_{it,11} = 1$ — для фирмы «Норд Америкэн Рокуэлл», в противном случае — нуль.

С помощью трех последних величин представлен зависящий от времени линейный сплайн (для всех i):

$$\begin{aligned}x_{it,12} &= t; \\x_{it,13} &= (t-4)_+; \\x_{it,14} &= (t-15)_+.\end{aligned}$$

Параметры β_j ($j = 0, 1, \dots, 14$) являются коэффициентами регрессии, соответствующими свободному члену и четырнадцати выше определенным регрессионным переменным. Предполагается, что возмущающие члены ε_{it} не коррелированы с объясняющими переменными и удовлетворяют соотношениям $\varepsilon_{it} = \rho\varepsilon_{i,t-1} + u_{it}$, $|\rho| < 1$, $E(\varepsilon_{it}\varepsilon_{jt}) = 0$, где $i \neq j$; $u_{it} \sim N(0, \sigma^2)$ и независимы, $E(\varepsilon_{i,t-1}u_{it}) = 0$, $\varepsilon_{i0} \sim N(0, \sigma^2/(1-\rho^2))$ и, следовательно, $E(\varepsilon_{it}^2) = \sigma^2/(1-\rho^2)$ при всех i и t . В более ранних работах эти предположения были еще более ослаблены путем введения так называемых «ошибок измерения». Но после статистической проверки гипотеза об их отсутствии не смогла быть отвергнута, вследствие чего далее рассматривается лишь описанный здесь вариант модели.

В работе [132] используются два различных определения нормы прибыли, являющейся зависимой переменной, причем соответствующие результаты приводятся отдельно для каждого варианта определения.

Первый вариант определения:⁵

$$y_{it} = \frac{\text{ВТИ}}{\text{ТА}} = \frac{\text{Доход фирмы } i \text{ за год } t \text{ до вычета налогов}}{\text{Общие активы фирмы } i \text{ в году } t}; \quad (6)$$

второй вариант определения:

$$y_{it} = \frac{\text{АТИ}}{\text{ТА}} = \frac{\text{Доход фирмы } i \text{ за год } t \text{ после вычета налогов}}{\text{Общие активы фирмы } i \text{ в году } t}. \quad (7)$$

Коэффициенты при трех временных переменных линейного сплайна β_{12} , β_{13} , β_{14} представляют собой коэффициент наклона сплайна над промежутком 1951—1954 гг., изменение коэффициента наклона при переходе от промежутка 1951—1954 гг. к промежутку 1954—1965 гг. и изменение углового коэффициента при переходе от промежутка 1954—1965 гг. к промежутку 1965—1971 гг. соответственно. Вопрос о том, оказывали ли войны какое-либо существенное и независимое влияние на норму прибыли, эквивалентен вопросу о том, насколько

⁵ ВТИ — сокращение от Before Tax Income, АТИ — After Tax Income, а ТА — Total Assets.

существенно отличаются от нуля коэффициенты β_{13} и β_{14} , описывающие эти два структурных изменения. Поэтому введение именно такой параметризации сплайна позволяет просто и непосредственно разобраться в результатах регрессии. Полный коэффициент наклона сплайна над промежутком 1954—1965 гг. равен $\beta_{12} + \beta_{13}$, а над промежутком 1965—1971 гг. — $(\beta_{12} + \beta_{13} + \beta_{14})$.

Рассматриваются две различные выборки, ни одна из которых не охватывает все девять фирм за весь 21-летний период. Причина такой неполноты набора данных состоит в том, что в течение этого периода происходил процесс слияния фирм, а также наблюдались изменения в ассортименте продукции. Выборка № 1 ($n = 119$) составлена в духе первой группы Агапоса и Галлавыя⁶. Выборка № 2 ($n = 112$) получена из выборки № 1 путем выбрасывания тех данных, которые соответствуют годам, когда были большие убытки⁷.

Результаты применения модели (5) к выборкам № 1 и 2 при использовании определенных нормы прибыли (6) и (7) приведены в табл. 1—4.

Табл. 1 содержит полученные с помощью обобщенного метода наименьших квадратов оценки коэффициентов регрессии (5), а также их *t*-статистики. Четыре оценки коэффициента автокорреляции первого порядка ρ , полученные на первом этапе процедуры оценивания и использованные для преобразования данных на ее втором этапе, равны 0,3099; 0,2366; 0,3226 и 0,3163 в каждом из четырех вариантов, соответствующих четырем столбцам табл. 1.

Рассмотрим сначала переменные, соответствующие государственным расходам. В каждом из четырех вариантов регрессии полученные оценки для коэффициентов β_2 и β_3 (затраты на научные исследования и разработки и расходы на космическую технику) устойчиво положительны, тогда как оценки коэффициента β_1 (закупки) устойчиво отрицательны. Поразительно, что коэффициент β_3 всюду оказывается имеющим высокую значимость, а его абсолютное значение по величине от пяти до двадцати четырех раз больше меньшего из коэффициентов β_1 и β_2 . Это, по-видимому, указывает на то, что при прочих равных условиях авиакосмическая промышленность получает существенно более высокую норму прибыли на космических заказах, чем на равных по стоимости заказах по поставкам для министерства обороны или на контрактах, связанных с научными исследованиями и разработками.

Оценка коэффициента, соответствующего переменной, описывающей воздействие научных исследований и разработок, значима в случае выборки № 2, которая более представительна в том, что касается рентабельности оборонных контрактов. Коэффициент, соответствующий

⁶ В выборку № 1 включены данные за следующие годы соответственно по фирмам: «Локхид» (1951—1971), «Боинг» (1951—1964), «Дуглас» (1951—1965), «Дженерал Дайнэмикс» (1953—1971), «Макдоннел» (1951—1965), «Норд Америкэн Авиэйшн» (1951—1966), «Аэроджет Дженерал» (1964—1971), «Макдоннел—Дуглас» (1966—1971), «Норд Америкэн Рокуэлл» (1967—1971).

⁷ Данные, присутствующие в выборке № 1, но исключенные из выборки № 2, таковы: «Локхид» (1960), «Дуглас» (1959—1960), «Дженерал Дайнэмикс» (1960—1962), «Макдоннел—Дуглас» (1967).

Коэффициенты регрессии и соответствующие *t*-статистики (в скобках)

Коэффициент	Выборка № 1		Выборка № 2	
	ВТА	АТИ	ВТИ	АТИ
	ТА	ТА	ТА	ТА
β_0	0,05065 (1,141)	0,01780 (0,7369)	0,05646* (1,706)	0,02091 (1,306)
β_1	$-0,1273 \times 10^{-5}$ (-0,4254)	$-0,1620 \times 10^{-5}$ (-0,9606)	$-0,3251 \times 10^{-5}$ (-1,439)	$-0,3072 \times 10^{-5***}$ (-2,802)
β_2	$0,5959 \times 10^{-5}$ (0,5159)	$0,05395 \times 10^{-5}$ (0,08454)	$1,691 \times 10^{-5**}$ (1,870)	$0,8664 \times 10^{-5*}$ (1,977)
β_3	$3,924 \times 10^{-5***}$ (3,981)	$2,119 \times 10^{-5***}$ (4,001)	$2,887 \times 10^{-5***}$ (3,823)	$1,510 \times 10^{-5***}$ (4,135)
β_4	0,06462** (2,040)	0,02953* (1,805)	0,04565* (1,911)	0,01866 (1,622)
β_5	0,003178 (0,1027)	0,0001071 (0,006705)	0,009821 (0,4135)	0,001713 (0,1497)
β_6	-0,002468 (-0,08664)	0,001371 (0,09339)	0,008648 (0,3896)	0,01097 (1,026)
β_7	0,09999*** (3,230)	0,04737*** (2,965)	0,08264*** (3,541)	0,03823*** (3,402)
β_8	0,07172** (2,371)	0,03231** (2,070)	0,05621** (2,466)	0,02375** (2,164)
β_9	0,1124*** (2,904)	-0,003319 (-0,1649)	0,1157*** (3,970)	0,0004943 (0,03519)
β_{10}	0,01022 (0,2361)	0,008976 (0,3972)	0,03246 (0,9931)	0,02071 (1,313)
β_{11}	0,05489 (1,186)	0,02442 (1,007)	0,06245* (1,793)	0,02981* (1,776)
β_{12}	0,03595** (2,245)	0,02182** (2,477)	0,04118*** (3,442)	0,02560*** (4,418)
β_{13}	-0,06456*** (-2,852)	-0,03437*** (-2,742)	-0,07114*** (-4,188)	-0,03995*** (-4,852)
β_{14}	0,03650** (2,367)	0,01496* (1,765)	0,03423*** (2,948)	0,01529*** (2,720)

* — указывает на 10%-ный уровень значимости.

** — указывает на 5%-ный уровень значимости.

*** — указывает на 1%-ный уровень значимости.

закупкам министерства обороны β_1 , незначим ни в одном случае, за исключением того варианта, когда рассматривается выборка № 2 совместно со вторым вариантом определения нормы прибыли — АТИ/ТА. «Неверный» на первый взгляд знак коэффициента β_1 является, по-видимому, результатом отсутствия таких рядов для закупок министерства обороны, которые дают отдельно размеры закупок авиакосмической техники⁸.

⁸ Если бы отношение объема закупок авиакосмической техники к общему объему закупок не зависело от времени, то полученные для этого коэффициента оценки были бы более содержательными. Однако даже для периода, когда в справочнике Statistical Abstract of The United States приводятся отдельные цифры по различным категориям закупок, доля контрактов на авиацию и ракеты (которые

Рассматривая коэффициенты линейного сплайна для всех четырех вариантов регрессии, мы приходим к неоспоримому, по-видимому, заключению, что приведенная норма прибыли имела существенную тенденцию к возрастанию во время войны в Корее, затем межвоенный период явно изменил эту тенденцию на обратную, после чего война во Вьетнаме, в свою очередь, вновь сменила эту убывающую тенденцию на возрастающую. Полные значения коэффициентов наклона (в отличие от их изменений при переходе от отрезка к отрезку) приведены в табл. 2. Как видно, период спада в мирное время (1954—1965 гг.) не только существенно отличается от возрастающего тренда периода войны в Корее, но, более того, величина коэффициента наклона на этом отрезке (1954—1965 гг.) становится существенно отрицательной. Подъем, вызванный войной во Вьетнаме, вновь вывел прибыль на возрастающую траекторию, однако (отчасти вследствие большой крутизны отрицательного наклона в мирное время) нельзя сказать, что положительность углового коэффициента над отрезком 1965—1971 гг. является значимой.

Таблица 2

Полные значения угловых коэффициентов и их *t*-статистики

Угловой коэффициент	Выборка № 1		Выборка № 2	
	$\frac{BT1}{TA}$	$\frac{AT1}{TA}$	$\frac{BT1}{TA}$	$\frac{AT1}{TA}$
β_{12}	0,03595** (2,245)	0,02182** (2,477)	0,04118*** (3,442)	0,02560*** (4,418)
$\beta_{12} + \beta_{13}$	-0,02862*** (-3,139)	-0,01255*** (-4,332)	-0,02997** (-2,497)	-0,01435*** (-4,284)
$\beta_{12} + \beta_{13} + \beta_{14}$	0,007883 (1,015)	0,002409 (0,7321)	0,004265 (0,5717)	0,0009410 (0,3339)

Эти результаты графически представлены на рис. 2.3 и 2.4. На них не указаны оси ординат и масштабы, поскольку высота расположения отрезков (но не форма образуемой ими ломаной) зависит от тех переменных модели, которые не входят в ее сплайновую часть.

Анализируя данную в табл. 3 и 4 сводку результатов регрессии, можно сказать, что в каждом из вариантов регрессии модель объясняет весьма существенную часть изменения нормы прибыли. Сравнивая варианты регрессии, имеющие одну и ту же зависимую переменную, можно также сказать, что для обоих случаев определения нормы прибыли выборка № 2, в которой опущены фирмы, имевшие за тот или иной год большие убытки, является более представительной для нашей модели⁹. Кроме того, анализируя результаты применения

приблизительно соответствуют всем авиакосмическим поставкам) колеблется в пределах от 44 до 76% общего объема закупок. Агапос и Галлавэй [1, с. 1100 и далее] использовали сходные аргументы при попытке объяснить, почему знак коэффициента при переменной, описывающей «общие расходы на оборону, деленные на ВВП», оказался отрицательным.

⁹ Должным образом примененный критерий Чоу дополнительно подтверждает этот вывод.

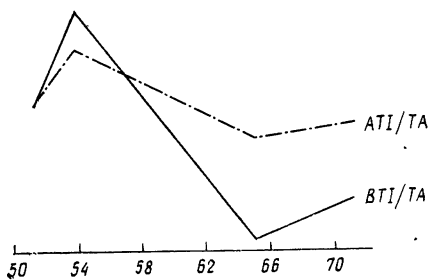


Рис. 2.3. Вид линейных сплайнов, описывающих приведенное значение нормы прибыли в случае выборки № 1

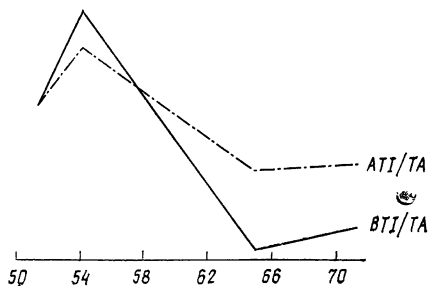


Рис. 2.4. Вид линейных сплайнов, описывающих приведенное значение нормы прибыли в случае выборки № 2

F-критерия к трем основным группам переменных, можно видеть, что в *каждом* случае весьма существенная доля изменения нормы прибыли находит объяснение после добавления к двум каким-либо группам переменных третьей. Это сильный аргумент в пользу того, что все три группы переменных существенно принадлежат модели.

Таблица 3

Статистика регрессии

	Выборка № 1		Выборка № 2	
	$\frac{BTI}{TA}$	$\frac{ATI}{TA}$	$\frac{BTI}{TA}$	$\frac{ATI}{TA}$
SST (общая сумма квадратов отклонений)	0,6511	0,1914	0,3820	0,08782
SSE (сумма квадратов ошибок)	0,4152	0,1330	0,2120	0,04995
Степени свободы	14 и 104	14 и 104	14 и 97	14 и 97
<i>F</i> -статистики	4,221***	3,257***	5,558***	5,253***
<i>R</i> ²	0,3624	0,3048	0,4451	0,4312
<i>s</i> (средняя квадратичная ошибка)	0,06318	0,03577	0,04675	0,02269

Таблица 4

Совместные *F*-критерии

Группа коэффициентов с нулевым ограничением	Выборка № 1		Выборка № 2	
	$\frac{BTI}{TA}$	$\frac{ATI}{TA}$	$\frac{BTI}{TA}$	$\frac{ATI}{TA}$
<i>F</i> -статистики	5,592***	5,793***	5,212***	6,692***
степени свободы	3 и 104	3 и 104	3 и 97	3 и 97
<i>F</i> -статистики	3,399***	2,094**	3,997***	2,385**
степени свободы	8 и 104	8 и 104	8 и 97	8 и 97
<i>F</i> -статистики	4,087***	3,444**	9,429***	11,92**
степени свободы	3 и 104	3 и 104	3 и 97	3 и 97

Таким образом, результаты, полученные с помощью модели (5), приводят к выводам, резко отличающимся от заключений Агапоса и Галлавэя. Во-первых, при разложении военных расходов на отдельные компоненты оказывается, что расходы на космическую технику и научные исследования и разработки положительно коррелированы с нормой прибыли. Хотя корреляция закупок министерства обороны с нормой прибыли оказалась отрицательной, это, по-видимому, обусловлено изменением от года к году доли закупок авиакосмической техники в общем объеме поставок для министерства обороны. Во-вторых, проявляются существенно различные и стабильные эффекты «индивидуальности» отдельных фирм, на что указывают высокие значения F -статистики, которая соответствует искусственным переменным, выделяющим конкретные фирмы. Агапос и Галлавэй даже не анализировали такие эффекты. В-третьих, и это для наших целей важнее всего, представление зависимости от времени в виде линейной сплайн-функции не только позволяет объяснить существенную долю изменения нормы прибыли, но и дает возможность разделить эффекты военного и мирного времени. В частности, видно, что как война во Вьетнаме, так и война в Корее оказали значимо благоприятное воздействие на норму прибыли фирм, вошедших в выборку. Агапос и Галлавэй так и не смогли отделить эффект влияния свсего коэффициента временного тренда от влияния коэффициентов, связанных с войнами и деятельностью Совета по пересмотру контрактов. Этим отчасти и объясняется полученный ими вывод, что война во Вьетнаме не оказала значимо благоприятного воздействия на норму прибыли. Но тот факт, что им не удалось уловить «структурное изменение» в зависимости переменной от времени, обусловлен в определенной мере выбором функции в таком виде, который не дает возможности явно описать изменение в коэффициенте наклона. Именно этот недостаток устраняется с помощью линейного сплайна.

3.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Введенное в предыдущей главе понятие линейного сплайна предполагает существование некой линейной зависимости, которая в узловых точках претерпевает структурные изменения. Если же исходная зависимость не является линейной, а описывается кубическим многочленом, то, разрешив ему подвергаться в узлах «структурным изменениям», мы получим так называемый *кубический сплайн*. В обоих этих случаях структурное изменение проявляется как точка разрыва n -й производной ($n = 1$ в случае линейного сплайна и $n = 3$ в случае кубического сплайна). В этой главе, как и почти повсюду в этой книге, главным аргументом в пользу применения сплайнов является необходимость каким-то образом смоделировать структурные изменения (см., в частности, раздел 3.6). С другой стороны, при использовании кубических сплайнов в качестве широкого класса аппроксимирующих функций можно (за счет введения дополнительных параметров) представить функциональную зависимость в гораздо более гибком и «гладком» виде, чем это достигается с помощью линейного сплайна.

В математических формулировках этого раздела мы следуем Албергу и др. [2, с. 9—16], Кершоу [101] и Пеннингтону [126, с. 404—411]. Этот способ изложения проще для понимания, чем более абстрактные и математические сложные конструкции, применяемые в большинстве работ по теории приближений¹. Однако наш подход отличается и от способа введения сплайна с помощью выражения (3) в главе 2, поскольку в этой главе мы представляем значения сплайна с помощью значений ординат в узловых точках².

В следующем определении дается точная математическая формулировка понятия кубического сплайна.

Определение 3.1. Будем называть множество точек оси абсцисс $\Delta = \{\bar{x}_0 < \bar{x}_1 < \dots < \bar{x}_k\}$ сеткой на $[\bar{x}_0, \bar{x}_k]$, а каждую из $k + 1 \geq 3$ точек \bar{x}_j ($j = 0, 1, \dots, k$) — узлом. Пусть $y = \{y_0, y_1, \dots, y_k\}$ — набор соответствующих значений ординат. Тогда *кубическим сплайном над Δ , интерполирующим набор ординат y* , называется функция $S_\Delta(x)$, такая, что:

¹ См., например, работу Шенберга [148].

² В разделе 8.2 будет введен такой способ представления сплайна n -го порядка, который обобщает способ представления из главы 2, а также обсуждены его преимущества и недостатки по сравнению со способом представления, предлагаемым в данной главе, и по сравнению с некоторыми другими.

- (1) $S_{\Delta}(x)$ и ее первая и вторая производные непрерывны на $[x_0, x_k]$;
- (2) $S_{\Delta}(x)$ на каждом интервале $[\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]$ ($j = 1, 2, \dots, k$) совпадает с некоторым многочленом степени не больше трех;
- (3) $S_{\Delta}(\bar{x}_j) = y_j$ ($j = 0, 1, \dots, k$).

Пример графика кубического сплайна приведен на рис. 3.1. Каждая из дуг, соединяющих точки (\bar{x}_{j-1}, y_{j-1}) и (\bar{x}_j, y_j) ($j = 1, 2, 3$), является графиком многочлена не более чем третьей степени, причем согласно условию (1) соседние дуги соединяются друг с другом непрерывно.

Из (1)—(3) можно вывести следующие условия непрерывности (детали вывода приведены в приложении, раздел 3.14):

$$\begin{aligned}
 (1 - \lambda_j) M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} &= \\
 &= \frac{6y_{j-1}}{h_j(h_j + h_{j+1})} - \frac{6y_j}{h_j h_{j+1}} + \\
 &+ \frac{6y_{j+1}}{h_{j+1}(h_j + h_{j+1})} \quad (1)
 \end{aligned}$$

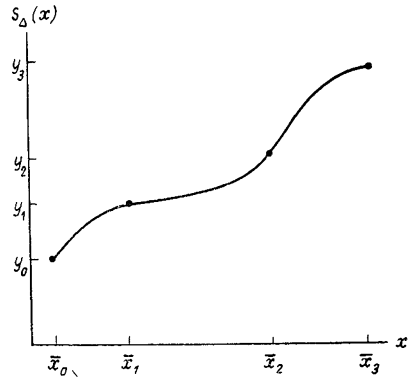


Рис. 3.1. Кубический сплайн с четырьмя узлами

Здесь (аналогично подобным величинам в теории упругих статических систем) значения второй производной сплайна в узлах $M_j = S_{\Delta}''(\bar{x}_j)$ ($j = 0, 1, \dots, k$) называются *моментами*³, $h_j = \bar{x}_j - \bar{x}_{j-1}$ есть длины интервалов, а

$$\lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}} \quad (j = 1, 2, \dots, k-1). \quad (2)$$

Условия непрерывности (1) состоят из $k - 1$ уравнений с $k + 1$ неизвестными M_j ($j = 0, 1, \dots, k$). Эта недоопределенность системы может быть устранена путем наложения на сплайн *граничных условий* в конечных точках \bar{x}_0 и \bar{x}_k . В литературе обсуждались различные способы введения граничных условий, однако в этом разделе мы ради простоты ограничимся лишь одним из них. Другие виды граничных условий будут рассмотрены в разделах 3.8 и 3.9.

Итак, предположим, что кубический сплайн удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$M_0 = \pi_0 M_1, \quad |\pi_0| < 2; \quad (3)$$

$$M_k = \pi_k M_{k-1}, \quad |\pi_k| < 2, \quad (4)$$

³ См. работу Алберга и др. [2, с. 1, 2, 10].

где π_0 и π_k — подлежащие определению параметры. Выбор значений π_0 и π_k не такая уж сложная задача, как это могло бы показаться. Как мы увидим далее, обычно оказывается возможным выбрать их значения до некоторой степени на основе априорных соображений. Для простоты мы рассматриваем π_0 , но параметр π_k определяется совершенно аналогично.

Если положить $\pi_0 = 1$, то отсюда следует, что на первом интервале $S_\Delta(x)$ вырождается в обычную квадратичную параболу. Если $\pi_0 = 0$, то $M_0 = 0$ независимо от величины M_1 ⁴. Более того, условие $M_0 = 0$ позволяет линейно соединять сплайны в точке \bar{x}_0 , из него следует, что $S'_\Delta(x)$ имеет критическую точку в \bar{x}_0 , и оно совместимо как с выпуклостью, так и с вогнутостью $S_\Delta(x)$ на $[\bar{x}_0, \bar{x}_1]$.

Если $0 < \pi_0 < 1$, то утверждения предыдущего абзаца выполняются в «псевдоузле» $\bar{x}_{-1} = (\bar{x}_0 - \pi_0 \bar{x}_1) / (1 - \pi_0) < \bar{x}_0$, т. е. $S''_\Delta(\bar{x}_{-1}) = 0$ ⁵. В частности, из $\pi_0 = \frac{1}{2}$ следует, что $\bar{x}_0 - \bar{x}_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}_0$, а из $\pi_0 = \bar{x}_0 / \bar{x}_1$ — что $\bar{x}_{-1} = 0$.

Граничные условия (3) и (4) можно объединить с условиями непрерывности (1), записав их в матричном виде. Для этого определим матрицы коэффициентов Λ и Θ , каждая из которых имеет $k + 1$ строку и $k + 1$ столбец:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & -2\pi_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 - \lambda_1 & 2 & \lambda_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda_2 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \lambda_{k-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \lambda_{k-1} & 2 & \lambda_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\pi_k & 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad (5)$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{6}{h_1(h_1+h_2)} & \frac{-6}{h_1 h_2} & \frac{6}{h_2(h_1+h_2)} & \dots \\ 0 & \frac{6}{h_2(h_2+h_3)} & \frac{-6}{h_3 h_3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

⁴ Если, кроме того, потребовать, чтобы $\pi_k = 0$, то $S_\Delta(x)$ называется естественным кубическим сплайном.

⁵ Подразумевается, что при $x < \bar{x}_0$ и при $x > \bar{x}_k$ $S_\Delta(x)$ определяется продолжением многочлена, соответствующего первому и последнему интервалам.

$$\begin{array}{ccc}
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 \frac{-6}{h_{k-2} h_{k-1}} & \frac{6}{h_{k-1}(h_{k-2} + h_{k-1})} & 0 \\
 \frac{6}{h_{k-1}(h_{k-1} - h_k)} & \frac{-6}{h_{k-1} h_k} & \frac{6}{h_k(h_{k-1} + h_k)} \\
 0 & 0 & 0
 \end{array} \cdot \quad (6)$$

Введем также векторы \mathbf{M} и \mathbf{y} — столбец неизвестных моментов и столбец значений ординат в узлах:

$$\mathbf{M} = [M_0, M_1, \dots, M_{k-1}]'; \quad (7)$$

$$\mathbf{y} = [y_0, y_1, \dots, y_k]'. \quad (8)$$

Теперь граничные условия и условия непрерывности можно объединить друг с другом и записать их в виде одного матричного соотношения:

$$\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{O}\mathbf{y}. \quad (9)$$

В тех случаях, когда $|\pi_0| < 1$ и $|\pi_k| < 1$, можно, пользуясь теоремой Гершгорина, показать, что матрица \mathbf{A} невырождена, поскольку абсолютная величина каждого диагонального элемента больше суммы абсолютных величин недиагональных элементов той же строки. Немного сложнее доказывается, что при $1 \leq |\pi_0| < 2$ и $1 \leq |\pi_k| < 2$ матрица \mathbf{A} также невырождена⁶. Следовательно, матричное уравнение (9) можно разрешить относительно неизвестного вектора моментов:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{O}\mathbf{y}. \quad (10)$$

Если вектор \mathbf{y} задан (задача аппроксимации с точными условиями), то система (9) может быть разрешена относительно \mathbf{M} непосредственно, без обращения матрицы \mathbf{A} , с помощью старого доброго метода решения системы линейных уравнений, матрица коэффициентов которой имеет трехдиагональную форму⁷. К сожалению, в случае аппроксимации методом наименьших квадратов столбец \mathbf{y} неизвестен и матрица \mathbf{A}^{-1} нужна в явном виде⁸. Тем не менее трехдиагональная структура \mathbf{A} позволяет применить устойчивую процедуру обращения.

Применяя последовательно (10) и (46), можно по каждому вектору значений абсцисс $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]'$ найти соответствующий вектор

⁶ См.: Алберг и др. [2, с. 61—63]. Условие, чтобы π_0 и π_k были меньше двух по абсолютной величине, достаточно для того, чтобы обеспечить обратимость \mathbf{A} . Как, однако, покажет пример, приведенный в разделе 3.7, оно не является необходимым.

⁷ См., например: Алберг и др. [2, с. 14—15].

⁸ В случае естественных кубических сплайнов Кершоу [102], [103] исследовал свойства \mathbf{A}^{-1} несколько подробнее. В разделе 3.10 произведение $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{O}$ приведено в явном виде в случаях $k = 2$ и $k = 3$.

$S_{\Delta}(\xi) = [S_{\Delta}(\xi_1), S_{\Delta}(\xi_2), \dots, S_{\Delta}(\xi_n)]'$ интерполирующих значений сплайна, который будет линейно зависеть от вектора ординат y^0 . Чтобы получить зависимость $S_{\Delta}(\xi)$ от y в матричном виде, необходимо ввести еще несколько матриц коэффициентов. Рассмотрим выражение (46) и определим две матрицы $P = [p_{im}]$ и $Q = [q_{im}]$ размерности $n \times (k+1)$ следующим образом. Пусть $x_{j-1} \leq \xi_i \leq x_j$ ($i = 1, 2, \dots, \dots, n$). Тогда положим:

$$p_{im} = \begin{cases} (\bar{x}_j - \xi_i)[(\bar{x}_j - \xi_i)^2 - h_j^2]/6h_j & \text{при } m = j-1 \\ (\xi_i - \bar{x}_{j-1})[(\xi_i - \bar{x}_{j-1})^2 - h_j^2]/6h_j & \text{при } m = j \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}; \quad (11)$$

$$q_{im} = \begin{cases} (\bar{x}_j - \xi_i)/h_j & \text{при } m = j-1 \\ (\xi_i - \bar{x}_{j-1})/h_j & \text{при } m = j \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}. \quad (12)$$

Из (10)—(12) и (46) следует, что

$$S_{\Delta}(\xi) = PM + QY = (P\Lambda^{-1}\Theta + Q)Y = WY, \quad (13)$$

где так называемая преобразованная матрица данных W размерности $n \times (k+1)$ имеет вид

$$W = P\Lambda^{-1}\Theta + Q. \quad (14)$$

3.2. КУБИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ И МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Посвятив предыдущий раздел этой главы математической формулировке определения кубического сплайна, перейдем теперь к построению статистической модели, включающей кубический сплайн и белый шум, после чего для оценивания параметров кубического сплайна могут быть использованы стандартные процедуры метода наименьших квадратов. $S_{\Delta}(x)$ полностью определяется сеткой Δ , параметрами граничных условий π_0 и π_k и вектором ординат y . В этом разделе мы будем считать Δ , π_0 и π_k заданными, а к y будем относиться как к неизвестному вектору, который подлежит оцениванию методом наименьших квадратов. Из выражения (13) видно, что $S_{\Delta}(y)$ линейно зависит от y , так что оценивание значений y проводится без затруднений. Перейдем к точной математической формулировке структуры модели¹⁰.

⁹ Хотя такое представление желательно для целей оценивания, при его использовании теряется явный вид аппроксимирующей функции. В разделе 3.11 приведен другой способ, подчеркивающий «кусочно-кубический» характер кубического сплайна.

¹⁰ Мы специально описываем эту модель с кубическим сплайном подробнее, чем в случае линейного сплайна, поскольку основанное на преобразованных переменных матрицы W представление имеет менее очевидный интуитивный смысл, чем преобразованные переменные, введенные в главе 2 формулами (3) и (5).

Модель. Пусть $\Delta = \{\bar{x}_0 < \bar{x}_1 < \dots < \bar{x}_k\}$ — заданная сетка, \bar{x}_0 и \bar{x}_k — заданные параметры граничных условий, а $y = [y_0, y_1, \dots, \dots, y_k]'$ — неизвестный вектор истинных ординат*, соответствующих узлам сетки Δ . Далее, пусть $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]'$ и $\eta = [\eta_1, \eta_2, \dots, \dots, \eta_n]'$ — векторы $n \geq k + 1$ данных наблюдений за неслучайной независимой переменной ξ и зависимой переменной η и пусть матрица W определена формулой (14), причем ее ранг равен $k + 1$. Наконец, пусть $\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n]'$ — вектор независимых нормально распределенных возмущающих членов, причем $E(\varepsilon) = 0$ и $E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 I$. Назовем чистым кубическим сплайном выражение $S_\Delta(\xi) = Wy$. Мы будем говорить, что данные наблюдений удовлетворяют *регрессионной модели с кубическим сплайном (РМКС)*, тогда и только тогда, когда

$$\eta = S_\Delta(\xi) + \varepsilon = Wy + \varepsilon.$$

Кубическим сплайном, поставленным с помощью метода наименьших квадратов в соответствие этой РМКС, называется кубический сплайн

$$\hat{S}_\Delta(\xi) = W\hat{y},$$

где \hat{y} есть оценитель метода наименьших квадратов y , полученный путем минимизации выражения

$$[\eta - \hat{S}_\Delta(\xi)]' [\eta - \hat{S}_\Delta(\xi)] = (\eta - W\hat{y})' (\eta - W\hat{y}) = e' e.$$

Применение обычных процедур метода наименьших квадратов приводит, как известно, к следующему выражению для \hat{y} :

$$\hat{y} = (W'W)^{-1} W' \eta = \Omega W' \eta, \quad (15)$$

где

$$\Omega = (W'W)^{-1}. \quad (16)$$

Также хорошо известно, что \hat{y} имеет нормальное распределение и дает наилучшую несмещенную линейную оценку для y , причем соответствующей ковариационной матрицей будет

$$E(y - \hat{y})(y - \hat{y})' = \Omega W' E(\varepsilon\varepsilon') W \Omega = \sigma^2 \Omega.$$

Наконец, несмещенный оценитель σ^2 имеет вид

$$s^2 = \frac{e' e}{n - k - 1}.$$

* В оригинале употребляется термин «population ordinates vector». Мы переводим его как «вектор истинных ординат» по аналогии с термином «population regression function» (см., например: Gujarati D. Basic Econometrics. N. Y., 1978, p. 23—24). Под этим последним термином имеется в виду функция $E(Y|X_i) = \hat{f}_i(X_i)$, которая устанавливает соответствие между математическим ожиданием Y и значением X_i и которую мы получили бы, если бы могли исследовать всю генеральную совокупность (population). Параметры такой зависимости были бы «истинными» параметрами, а зависимость можно было бы назвать истинной регрессионной функцией. В случае оценивания упомянутой зависимости на основе выборки мы имеем дело с выборочной регрессионной функцией и с оценками параметров. — *Примеч. ред.*

Укажем еще, что доверительный интервал с уровнем доверия $1 - \alpha$ для y_j ($j = 0, 1, \dots, k$) задается неравенством

$$\hat{y}_j - t_{n-k-1} s_0 \leq y_j \leq \hat{y}_j + t_{n-k-1} s_0, \quad (17)$$

где $s_0 = s\sqrt{\omega_{jj}}$, ω_{jj} есть диагональный элемент j -й строки матрицы Ω , а t_{n-k-1} — такое значение t -статистики Стьюдента с $n - k - 1$

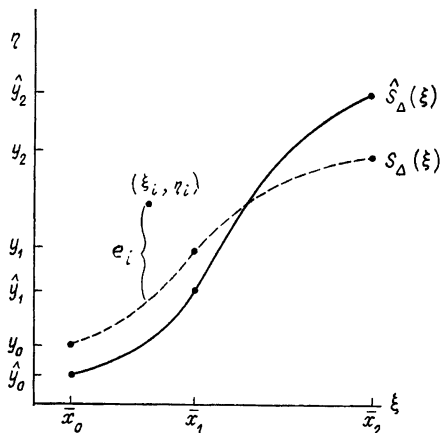


Рис. 3.2. Регрессионная модель с кубическим сплайном

степенями свободы, при котором от каждого «хвоста» графика распределения отсекается доля общей площади под графиком, равная $\frac{\alpha}{2}$.

Чтобы наглядно представить эту модель, обратимся к рис. 3.2, который иллюстрирует случай $k = 2$. Стоит отметить, что оцениваемые параметры суть подлинные значения ординат (а не угловые коэффициенты) истинной функции регрессии $S_{\Delta}(\xi)$, соответствующие точкам оси абсцисс, выбраным в качестве узлов. В случае простой линейной регрессии такую интерпретацию можно дать

лишь постоянному члену, а поскольку он соответствует нулевой точке оси абсцисс, его значение часто оказывается весьма далеким от данных выборок.

3.3. СЛУЧАЙ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ПРЕОБРАЗОВАННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Случай, когда преобразованные переменные ортогональны (как столбцы \mathbf{W}), представляет особый интерес по двум причинам. Во-первых, матрица $\mathbf{W}'\mathbf{W}$ диагональна и, стало быть, легко обращается, и, во-вторых, ковариационная матрица $\sigma^2\Omega$ случайного вектора $\hat{\mathbf{y}}$ тоже диагональна, откуда следует, что ковариации между различными оценителями метода наименьших квадратов равны нулю. Хотя ортогональность — явное исключение, а не правило, этот случай достаточно интересен, поскольку все остальные ситуации можно исследовать, рассматривая их как отклонения от этого частного случая.

Интуитивно представляется правдоподобным, что оценитель для \mathbf{u} будет наилучшим, когда данные наблюдений ξ соответствуют точкам оси абсцисс, очень близким к узлам. Предельный случай, когда каждое ξ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) совпадает с одним из узлов \bar{x}_j ($j = 0, 1, \dots, \dots, k$) и для каждого узла существует по крайней мере одно равное ему ξ_i , изображен на рис. 3.3.

В этом случае матрица \mathbf{P} , определяемая выражением (11), оказывается нулевой, а матрица \mathbf{Q} , определяемая (12), принимает вид

$$q_{im} = \begin{cases} 1 & \text{при } m=j; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, $\mathbf{W} = \mathbf{Q}$ и

$$\mathbf{W}'\mathbf{W} = \begin{bmatrix} n_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n_k \end{bmatrix},$$

где $n_j > 0$ ($j = 0, 1, \dots, k$) есть число величин ξ_i , равных x_j , а $n = n_0 + n_1 + \dots + n_k$ ¹¹.

Обращая $\mathbf{W}'\mathbf{W}$, получаем

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n_k} \end{bmatrix},$$

и подстановка в (15) дает оценщик метода наименьших квадратов

$$\hat{y} = [\bar{\eta}_0, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_k]', \quad (18)$$

где $\bar{\eta}_j$ ($j = 0, 1, \dots, k$) есть среднее арифметическое всех наблюдений зависимой переменной, приходящихся на точку \bar{x}_j .

Как видно из выражения (18), из ортогональности преобразованных переменных следует, что оценщик метода наименьших квадратов для \hat{y} локально зависит от вектора наблюдений за зависимой переменной $\boldsymbol{\eta}$, что означает, что \hat{y}_j полностью определяется наблюдениями η_j , соответствующими точке \bar{x}_j ¹². Разумеется, если точки ξ_i перестают совпадать с узлами, свойство ортогональности пропадает. Тем не менее при относительно небольших отклонениях некоторая степень локальной зависимости должна сохраниться. Вообще говоря, сформулировать более точные утверждения нельзя, но в том или ином конкретном случае, рассматривая j -ю строку ($j = 0, 1, \dots, k$) матрицы $\mathbf{\Omega}\mathbf{W}'$,

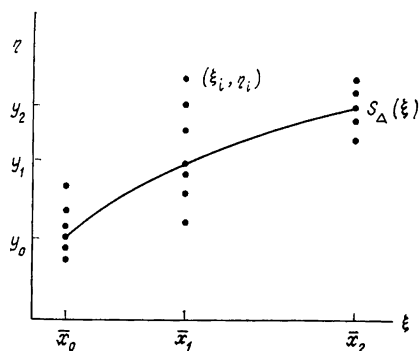


Рис. 3.3. Случай ортогональности преобразованных переменных

¹¹ Заметим, что модель свелась к простому дисперсионному анализу.

¹² В несколько иной ситуации локальная зависимость обсуждается Хадсоном [98, с. 1100]. Хотя теорема 1 [98, с. 1104] неприменима к кубическому сплайну, поскольку функция непрерывна, ее можно применять в случае линейного сплайна с «оптимально расположенными» узлами.

можно определить, соответствуют ли те η_i , которым приписаны наибольшие веса, значениям ξ_i , близко лежащим к точке \bar{x}_j^{13} .

Еще одна интерпретация свойства почти локальной зависимости заключается в том, что матрица Ω рассматривается как имеющая форму «почти диагональной» матрицы, недиагональные элементы которой быстро убывают по абсолютной величине с удалением от главной диагонали. В этих случаях ковариация между оценителями метода наименьших квадратов \hat{y}_j ($j = 0, 1, \dots, k$) мала. Таким образом, ситуация ближе всего к случаю ортогональности тогда, когда точки оси абсцисс, соответствующие наблюдениям, имеют тенденцию образовывать отдельные группы, внутри которых и выбираются узлы. При этом оценки имеют хорошие свойства, характерные для случая ортогональности.

3.4. ИНТЕРВАЛЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

Предположим, $\bar{x}_{j-1} \leq \xi_0 \leq \bar{x}_j$ и пусть $w_0 = p\Lambda^{-1}\Theta + q$, где p и q — два вектора, определяемые аналогично формулам (11) и (12) соответственно. Поскольку регрессионную модель с кубическим сплайном можно рассматривать как стандартную модель множественной регрессии, независимые переменные которой определяются преобразованными столбцами матрицы W , обычная теория утверждает, что интервал прогнозирования с уровнем доверия $1 - \alpha$ для конкретного значения η_0 , соответствующего ξ_0 , есть

$$\hat{S}_\Delta(\xi_0) - t_{n-k-1} s_1 \leq \eta_0 \leq \hat{S}_\Delta(\xi_0) + t_{n-k-1} s_1, \quad (19)$$

а интервал прогнозирования для среднего $E(\eta_0)$ есть

$$\hat{S}_\Delta(\xi_0) - t_{n-k-1} s_2 \leq E(\eta_0) \leq \hat{S}_\Delta(\xi_0) + t_{n-k-1} s_2, \quad (20)$$

где $s_1 = s(1 + w_0 \Omega w_0')^{\frac{1}{2}}$,

а $s_2 = s(w_0 \Omega w_0')^{\frac{1}{2}}$.

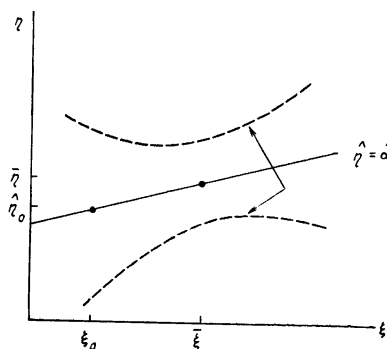


Рис. 3.4. Интервалы прогнозирования в случае простой линейной регрессии

Однако представляет интерес поведение интервалов прогнозирования в терминах ξ_0 , а не в терминах преобразованных переменных. В простом линейном регрессионном анализе, где η зависит от ξ , интервалы прогнозирования определяются гиперболой, подобной той, которая изображена на рис. 3.4.

Важно отметить, что если интервалы прогнозирования имеют такой вид, то их величина обязательно растет с увеличением расстояния

¹³ Тем не менее Пауэллом [135] были получены некоторые интересные результаты для случая равномерных сеток (для которых расстояния между узлами постоянны) и непрерывной L_2 -нормы.

от ξ_0 до среднего арифметического

$$\bar{\xi} = (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)/n.$$

Такая ситуация не обязательна для интервалов прогнозирования (19) и (20) или же для интервалов, соответствующих линейному сплайну и многочлену.

Поскольку интервал прогнозирования (19) при $\xi_0 = \bar{x}_j$ сводится к доверительному интервалу (17) и поскольку концы интервала прогнозирования непрерывно зависят от ξ_0 , поведение этого интервала в значительной мере определяется тем, с какой степенью точности получены оценки каждой из величин y_j . Далее, в разделе 3.3 мы видели, что в ортогональном случае эта точность зависит только от числа наблюдений в каждом узле, и, следовательно, величины y_0 и y_k можно оценить очень точно. В этом случае рис. 3.4 вовсе не является точным, а интервал прогнозирования будет наибольшим для некоторого промежуточного значения $\bar{x}_0 < \xi_0 < \bar{x}_k$. Аналогичные замечания справедливы и для интервала прогнозирования (19).

3.5. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ О НАЛИЧИИ ЛИНЕЙНЫХ И КВАДРАТИЧНЫХ КУСКОВ

В регрессионном анализе принято использовать линейные (как по переменным, так и по параметрам) функции. Поэтому всегда уместно проверить, не является ли тот или иной отдельный кусок кубического сплайна на самом деле просто линейной функцией. Хотя условие непрерывности $S'_\Delta(x)$ не позволяет сплайну $S_\Delta(x)$ иметь вид кусочно-линейной функции (кроме того тривиального случая, когда над всем отрезком $[\bar{x}_0, \bar{x}_k]$ проходит одна и та же прямая), тем не менее существование линейных кусков дает возможность применять при соответствующих интервалах стандартные регрессионные методы.

К счастью, проверка $S_\Delta(x)$ на линейность над отрезком $[\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]$ ($j = 2, 3, \dots, k-1$) значительно упрощается вследствие кусочно-линейного характера $S''_\Delta(x)$. В частности, из $M_{j-1} = M_j = 0$ следует, что $S''_\Delta(x) = 0$ при $\bar{x}_{j-1} \leq x \leq \bar{x}_j$, и, следовательно, на этом участке функция $S_\Delta(x)$ линейна. Таким образом, соответствующие гипотезы имеют вид:

$$H_0 : M_{j-1} = M_j = 0;$$

$$H_1 : M_{j-1} \neq 0 \text{ или } M_j \neq 0.$$

Для проверки нулевой гипотезы определим матрицу \mathbf{R} размерности $2 \times (k+1)$, которая состоит из $(j-1)$ -х строк $\mathbf{A}^{-1}\Theta$. Теперь, используя стандартные процедуры проверки гипотез, H_0 можно считать отвергнутой, если выполняется неравенство

$$[\hat{M}_{j-1}, \hat{M}_j] (\mathbf{R}\mathbf{O}\mathbf{R}')^{-1} [\hat{M}_{j-1}, \hat{M}_j]' / 2s^2 \geq F_{2, n-k-1},$$

где $[\hat{M}_{j-1}, \hat{M}_j]' = \mathbf{R}\hat{\mathbf{Y}}$, а $F_{2, n-k-1}$ есть значение F -статистики с 2 и $(n-k-1)$ степенями свободы и с уровнем доверия $1 - \alpha$.

Если гипотеза H_0 отвергается, то это означает, что с уровнем доверия $1 - \alpha$ функция $S_\Delta(x)$ не является линейной над $[\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]$.

Совершенно аналогичным образом можно построить критерий наличия квадратичных кусков. Функция $S_\Delta(x)$ сводится к квадратичной над $[\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]$ тогда и только тогда, когда $M_{j-1} = M_j$. Поэтому соответствующие гипотезы выглядят так:

$$H'_0 : M_{j-1} = M_j;$$

$$H'_1 : M_{j-1} \neq M_j.$$

Обозначим через \mathbf{r} вектор-строку, полученную вычитанием $(j - 1)$ -й строки матрицы $\Lambda^{-1}\Theta$ из j -й строки. Тогда H'_0 может считаться отвергнутой, если справедливо неравенство

$$(\hat{M}_j - \hat{M}_{j-1})^2 / s^2 (\mathbf{r}\Omega\mathbf{r}') \geq F_{1, n-k-1}, \quad (21)$$

т. е. в этом случае с уровнем доверия $1 - \alpha$ функция $S_\Delta(x)$ не является квадратным трехчленом над $[\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]$. Ясно, что если отвергнута гипотеза H'_0 , то необходимо отказаться и от гипотезы H_0 .

3.6. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ О НАЛИЧИИ СТРУКТУРНОГО ИЗМЕНЕНИЯ

Прежде чем перейти к построению критерия наличия у кубического сплайна структурного изменения, сделаем одно небольшое замечание. Во всех тех случаях, когда $S_\Delta'''(\bar{x}_j)$ претерпевает скачок в

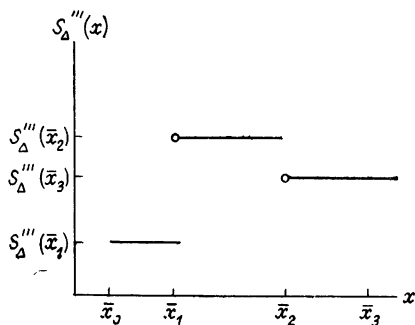


Рис. 3.5. Пример графика $S_\Delta'''(x)$

точке \bar{x}_j ($j = 1, 2, \dots, k - 1$), ей нельзя дать хорошее однозначное определение в \bar{x}_j , поскольку график $S_\Delta'''(x)$ в точке \bar{x}_j имеет излом. Поэтому условимся считать, что $S_\Delta'''(\bar{x}_j) = S_\Delta'''(\bar{x}_j^-)$ ($j = 1, 2, \dots, k$) и что $S_\Delta'''(\bar{x}_0) = S_\Delta'''(\bar{x}_0^+)$. Тогда график $S_\Delta'''(x)$ будет, вообще говоря, выглядеть так, как показано на рис. 3.5.

Из графика видно, что $S_\Delta'''(x)$ является в общем случае ступенчатой функцией, а следовательно, во внутренних узлах ей разрешено претерпевать скачки. Если взять два соседних интервала, то кубический сплайн над ними будет эквивалентен одному и тому же кубическому многочлену тогда и только тогда, когда функция $S_\Delta'''(x)$ непрерывна над этими двумя интервалами. Следовательно, в случае, когда в точке \bar{x}_j ($j = 1, 2, \dots, k - 1$) происходит структурное изменение (в любом из упомянутых ранее вариантов), разумно, по-видимому,

ожидать, что величина скачка, претерпеваемого третьей производной в \bar{x}_j , будет существенно отличаться от нуля.

Продифференцировав функцию $S_{\Delta}''(x)$, заданную выражением (44), и используя предыдущее определение, можно получить следующее выражение для $S_{\Delta}'''(x)$:

$$S_{\Delta}'''(x) = (M_j - M_{j-1})/h_j, \quad \bar{x}_{j-1} < x \leq \bar{x}_j.$$

Обозначим через \mathbf{g}_i ($i = j-1, j, j+1$) i -ю строку матрицы $\Lambda^{-1}\Theta$. Тогда величину скачка, претерпеваемого функцией $S_{\Delta}'''(x)$ в точке \bar{x}_j ($j = 1, 2, \dots, k-1$), можно записать в виде

$$\begin{aligned} \tau_j &= S_{\Delta}'''(\bar{x}_j^+) - S_{\Delta}'''(\bar{x}_j^-) = [(M_{j+1} - M_j)/h_{j+1}] - [(M_j - M_{j-1})/h_j] = \\ &= \left[\frac{1}{h_{j+1}} (\mathbf{g}_{j+1} - \mathbf{g}_j) - \frac{1}{h_j} (\mathbf{g}_j - \mathbf{g}_{j-1}) \right] \mathbf{y} = \mathbf{g}\mathbf{y}, \end{aligned}$$

где вектор-строка \mathbf{g} определяется так:

$$\mathbf{g} = \left[\frac{1}{h_{j+1}} (\mathbf{g}_{j+1} - \mathbf{g}_j) - \frac{1}{h_j} (\mathbf{g}_j - \mathbf{g}_{j-1}) \right].$$

Теперь проверку того, происходит ли в \bar{x}_j структурное изменение (или, что эквивалентно, имеется ли существенное отличие величины скачка $\hat{\tau}_j$ от нуля), можно проводить, оценивая справедливость следующих гипотез:

$$H_0'' : \tau_j = 0;$$

$$H_1'' : \tau_j \neq 0.$$

Гипотеза H_0'' (отсутствие структурного изменения) может быть отвергнута с уровнем доверия $1 - \alpha$, если

$$\hat{\tau}_j^2/s^2 (\mathbf{g}\Omega\mathbf{g}') \geq F_{1, n-k-1}, \quad (22)$$

где $\hat{\tau}_j = \mathbf{g}\hat{\mathbf{Y}}$ есть оценка величины скачка третьей производной в \bar{x}_j .

Хотя эта проверка проводится очень легко, соответствующий ей критерий следует применять с определенной степенью осторожности. Если H_0'' отвергается, это означает, что утверждению о наличии структурного изменения в рассматриваемом узле можно приписать уровень доверия $1 - \alpha$. Кроме того, это говорит в пользу выбора такой оценивающей функции, которая состоит из отдельных кусков, склеенных в рассматриваемом узле. Однако, как и в случае линейного сплайна, из этого вовсе не следует, что рассматриваемый узел расположен оптимально (в том смысле, что небольшим шевелением узла нельзя добиться, чтобы сумма квадратов ошибок уменьшилась). Обсуждение вопроса об оптимальном расположении узлов мы отложим до главы 7.

Если гипотезу H_0'' нельзя отвергнуть, из этого вовсе не очевидно, что она справедлива, в особенности если имеются сильные априорные соображения в пользу наличия структурного изменения в точке \bar{x}_j . Например, может помешать отсутствие около \bar{x}_j данных наблюдений, так что вследствие свойства локальной зависимости кубического сплай-

на мы можем оказаться не в состоянии отвернуть H_0'' . Такую ситуацию можно исправить добавлением новых наблюдений (хотя и не всегда). Другой помехой может быть эффект запаздывания. Структурное изменение в точке \bar{x}_j может оказаться вследствие этого эффекта необнаруженным, несмотря на наличие серьезных априорных доводов в пользу такого изменения. Если рассматриваемая теория допускает запаздывания, тогда разумно, по-видимому, изменить выбор точек \bar{x}_j с учетом этого обстоятельства. В тех случаях, когда для выбора новых узлов имеется теоретическое обоснование, подобные узлы будут называться *квазификсированными узлами*. Такое название призвано, с одной стороны, указывать на их близкое сходство с рассмотренными ранее фиксированными узлами, а с другой — на их существенное отличие от переменных (свободных) узлов.

Попытка отвергнуть H_0'' могла закончиться неудачей и вследствие того, что одна из точек \bar{x}_i ($i \neq j$) была выбрана в качестве узла без достаточных на то теоретических оснований. В этом случае может оказаться разумным следующий путь. Будем считать все узлы квазификсированными, после чего совсем исключим \bar{x}_i и вновь подвергнем проверке H_0'' ¹⁴. Такой способ применим, если значение k достаточно велико ($k \geq 3$). Наличие дополнительной степени свободы и соответствующее изменение значения $\hat{\tau}_j$ могут оказаться достаточными для отклонения H_0'' .

3.7. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К МОДЕЛИ «ОБУЧЕНИЯ НА ОПЫТЕ»

Этот раздел основан на работе [13], в которой анализируется техническое совершенствование машин, участвующих в автомобильных гонках «Индианаполис 500» со времени их основания в 1911 г. В своей работе [13] Барзел изучал влияние двух мировых войн на результаты гонщиков, отождествляя тем самым технический прогресс с ростом скорости победителя гонок и используя в качестве независимой переменной время. Он пишет следующее [13, с. 74]: «Влияние двух мировых войн на результаты гонок могло быть двояким. С одной стороны, сказывался связанный с военной необходимостью технический прогресс, а с другой стороны — вынужденный перерыв в проведении гонок в военное время. В том смысле, что прогресс частично обусловлен эффектом «обучения на опыте», военные годы можно считать потерянными для гоночного спорта».

Хотя вовсе не очевидно, что время само по себе является той переменной, которая определяет технический прогресс, Барзел отмечает высокую степень корреляции времени с такими факторами, как улучшение материальной части, приобретение опыта и т. д. Он считает, что это оправдывает использование временного параметра в качестве «заместителя» всех таких переменных. Выбор скорости победы

¹⁴ Этот метод подобен исключению из уравнения регрессии тех переменных, коэффициенты перед которыми пренебрежимо малы. Любая критика такой методики справедлива и здесь.

теля в качестве меры технического прогресса, по-видимому, разумен и обладает еще и тем дополнительным преимуществом, что эти скорости всегда измеряются с большой точностью (обычно шесть знаков). Однако в отличие от Барзела автор настоящей книги считает, что эти две переменные связаны друг с другом непрерывным образом на всем промежутке времени, *включая* военные годы. Тот факт, что в эти годы гонки не проводились, вряд ли сильнее скажется на непрерывности, чем то, что гонок не было и между каждой парой наблюдений. Если же, как это делает Барзел, вводить обычные искусственные переменные, автоматически появятся точки «таинственного» сдвига, в которых технический прогресс совершает *мгновенный* скачок вверх или вниз.

По-видимому, следует использовать более гибкую форму функциональной зависимости, а не ограничиваться, как это сделал Барзел, линейной функцией, обратно пропорциональной, двойной логарифмической или полулогарифмической зависимостью. Несмотря на то что двойная логарифмическая модель имеет некоторые теоретические основания¹⁵, Барзел считает ее несколько неудовлетворительной. Он отдает предпочтение полулогарифмической форме, однако в этом случае относительное приращение скорости постоянно во времени, а обоснованность такого предположения не очевидна. Так, весьма вероятно, что период депрессии в конце 20-х и начале 30-х годов сказался на динамике многих существенных параметров (таких, например, как расходы на научные исследования и разработки). Это нашло отражение в том, что значения скоростей победителей гонок в этот период времени практически не возрастали (в особенности в 1932—1934 гг.), хотя процесс «обучения на опыте» и продолжался.

Привлекательной альтернативой моделям Барзела является регрессионная модель с использованием

Таблица 5

Скорости автомашин — победителей
в гонках «Индианаполис 500»

Год	Скорость победителя	Год	Скорость победителя	Год	Скорость победителя
1911	74,59	1932	104,114	1955	128,209
1912	78,72	1933	104,162	1956	128,490
1913	75,931	1934	104,863	1957	135,601
1914	82,47	1935	106,240	1958	133,791
1915	89,84	1936	109,069	1959	138,857
1916	84,00	1937	113,580	1960	138,767
1919	88,05	1938	117,200	1961	139,130
1920	88,62	1939	115,035	1962	140,293
1921	89,62	1940	114,277	1963	143,137
1922	94,48	1941	115,117	1964	147,350
1923	90,95	1946	114,820	1965	151,388
1924	98,23	1947	116,338	1966	144,317
1925	101,13	1948	119,814	1967	151,207
1926	95,904	1949	121,327	1968	152,882
1927	97,545	1950	124,002	1959	156,867
1928	99,482	1951	126,244	19 0	155,749
1929	97,585	1952	128,922	1971	157,735
1930	100,448	1953	128,740		
1931	96,629	1954	130,840		

Источники: данные 1911—1960 гг. — Bloemker Al. 500 Miles to Go. The Story of the Indianapolis Speedway. New York. Coward-McCann, Inc., 1961, p. 271—277; 1961—1971 гг. — The 1973 World Almanac and Book of Facts. New York, Newspaper Enterprise Association, 1972, p. 901.

¹⁵ См. [59].

кубического сплайна. Примем 1910 г. за нулевой, поставим в соответствие году, в котором происходили гонки, числа ξ_i ($i = 1, 2, \dots, 55$), равные календарному обозначению года минус 1910, и обозначим через η_i результат наблюдения, а именно скорость машины — победителя гонок (см. табл. 5). Далее разделим период времени 1911—1917 гг. на три подпериода сеткой $\Delta = \{1; 7,4; 33,5; 61\}$, узлы которой выбраны в середине промежутков времени, когда гонки не проводились¹⁶. Далее, пусть $y = [y_0, y_1, y_2, y_3]'$ есть вектор значений «теоретических» скоростей победителей (неизвестные параметры), соответствующих узлам. Наконец, положим $\pi_0 = \pi_3 = 2$.

Теперь, обозначая через ε_i ($i = 1, 2, \dots, 55$) независимые и нормально распределенные возмущающие члены с нулевым математическим ожиданием и постоянной дисперсией σ^2 , можно построить модель:

$$\eta_i = S_{\Delta}(\xi_i) + \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, 55). \quad (23)$$

Применение к модели (23) обычного метода наименьших квадратов приводит к следующей оценке для вектора ординат:

$$\hat{y} = [76,03; 86,71; 116,1; 158,6]'$$

Соответствующей ковариационной матрицей будет

$$s^2 \Omega = \begin{bmatrix} 2,259 & 0,6668 & -0,007446 & -0,2784 \\ 0,6668 & 0,5093 & -0,02960 & 0,1420 \\ -0,007446 & -0,02960 & 0,3681 & -0,3268 \\ -0,2784 & 0,1420 & -0,3268 & 1,651 \end{bmatrix}.$$

Применяя для получения оценок второй производной в узлах выражение (10), можно переписать (44) в «кусочно-кубическом» виде (см. раздел 3.11), что и дает кубический сплайн вида

$$\hat{S}_{\Delta}(x) = \begin{cases} 74,09 + 1,994x - 0,05058x^2 + 0,001204x^3, & 1 \leq x \leq 7,5 \\ 74,41 + 1,867x - 0,03356x^2 + 0,0004480x^3, & 7,5 \leq x \leq 33,5 \\ 86,03 + 0,8260x - 0,002501x^2 + 0,0001389x^3, & 33,5 \leq x \leq 61 \end{cases}.$$

График этого сплайна изображен на рис. 3.6. Коэффициент детерминации модели (доля, которую объясненная вариация составляет от общей) равен $R^2 = 0,9995$, а средняя квадратичная ошибка оценки есть 2,793.

В модели Барзела наличие эффекта военного времени определяется путем проверки того, существенно ли отличаются от нуля коэф-

¹⁶ Был рассмотрен и вариант с узлами в начале и конце каждого военного периода. Результаты существенно не изменились. Данные включают и 1970—1971 гг., тогда как результаты Барзела основывались на периоде 1911—1969 гг.

фициенты наклона соответствующих искусственных переменных. Он приходит к заключению, что такое отличие для каждого из этих коэффициентов имеет место, откуда и вытекает вывод об уменьшении скорости роста результатов победителей гонок вследствие отсутствия в военные годы эффекта «обучения на опыте».

Как мы видели в разделе 3.6, в нашей модели наличие эффекта военного времени соответствовало бы тому, что два соседних полиномиальных куска существенно отличались бы друг от друга, т. е. что преобладаемые функцией $S_{\Delta}'''(x)$ во внутренних узлах $\bar{x}_1 = 7,5$ и $\bar{x}_2 = 33,5$ скачки были бы существенно отличны от нуля. В этом случае можно было бы заключить, что отмена гонок в военные годы действительно оказала влияние на технический прогресс.

Соответствующие неравенству (22) F -статистики равны 7,743 для $\bar{x}_1 = 7,5$ (перерыв, вызванный первой мировой войной) и 9,721 для $\bar{x}_2 = 33,5$ (перерыв, вызванный второй мировой войной). Поскольку обе эти статистики значимы на уровне 1% и поскольку обе оценки величины скачков $\hat{\tau}_1 = -0,004537$ и $\hat{\tau}_2 = -0,001854$ отрицательны, наша регрессионная модель с использованием кубического сплайна еще раз подтверждает вывод Барзела о том, что в военные годы, когда гонки не проводились, наблюдалась задержка в развитии технического прогресса (измеряемого величиной скорости победителя).

В заключение интересно проверить, можно ли считать каждый из кусков нашего сплайна значимо кубическим, т. е. не является ли какой-нибудь из них на самом деле квадратным трехчленом или линейной функцией. Соответствующая (21) F -статистика дает значения 9,459 для первого интервала, 13,49 — для второго интервала и 24,62 — для третьего. Поскольку все эти статистики значимы на уровне 1%, можно сделать вывод, что ни один из кусков сплайна не является квадратичным.

3.8. АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Хотя граничные условия (3) и (4) вполне достаточны для большинства приложений, тем не менее желательно иметь возможность задавать эти условия и иными способами. В этом разделе рассматриваются три альтернативных типа граничных условий, которые можно задавать в обоих концах области определения непериодического кубиче-

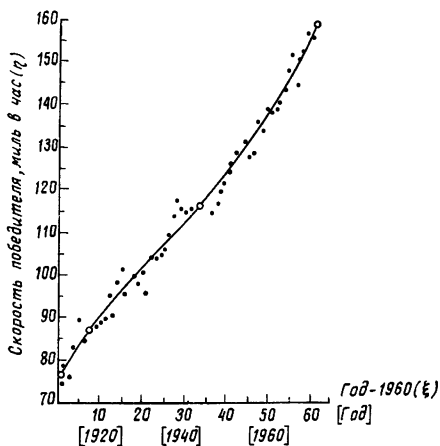


Рис. 3.6. Скорость автомашины — победителя гонок «Индианаполис 500» (наблюдения и прогноз)

ского сплайна. Тем самым с учетом граничных условий (3) и (4) мы получим четыре варианта задания левого граничного условия и четыре варианта задания правого граничного условия, что в общей сложности дает шестнадцать возможных комбинаций. Более подробное рассмотрение вопроса о граничных условиях можно найти в работах Алберга и др. [2, с. 11], Кершоу [101, с. 69] и Пеннингтона [126, с. 406—407].

Первый тип граничных условий — это задание в конечных точках значений второй производной сплайна. В этом случае, полагая $S''_{\Delta}(\bar{x}_0) = y''_0$ и $S''_{\Delta}(\bar{x}_k) = y''_k$, соотношения (3) и (4) можно заменить следующими:

$$2M_0 = 2y''_0; \quad (24)$$

$$2M_k = 2y''_k. \quad (25)$$

Подставим в матрицу Λ $\pi_0 = \pi_k = 0$ и положим

$$\mathbf{Z} = [z_0, z_1, \dots, z_k]',$$

где

$$z_0 = 2y''_0, \quad z_i = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, k-1), \quad z_k = 2y''_k.$$

Тогда выражение (9) принимает вид

$$\Lambda \mathbf{M} = \Theta \mathbf{y} + \mathbf{Z}. \quad (26)$$

Проводя те же выкладки, что и на с. 33—34, получим вместо выражения (13)

$$S_{\Delta}(\xi) = \mathbf{W} \mathbf{y} + \mathbf{P} \Lambda^{-1} \mathbf{Z}, \quad (27)$$

и оценитель метода наименьших квадратов для \mathbf{y} , получаемый из (15), принимает вид

$$\hat{\mathbf{y}} = (\mathbf{W}' \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}' (\hat{\boldsymbol{\eta}} - \mathbf{P} \Lambda^{-1} \mathbf{Z}). \quad (28)$$

Второй тип граничных условий — это задание в конечных точках \bar{x}_0 и \bar{x}_k значений первой производной сплайна. В этом случае, полагая $S'_{\Delta}(\bar{x}_0) = y'_0$ и $S'_{\Delta}(\bar{x}_k) = y'_k$, соотношения (3) и (4) можно заменить следующими:

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_1} \left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - y'_0 \right);$$

$$M_{k-1} + 2M_k = \frac{6}{h_k} \left(y'_k - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} \right).$$

Подставим в матрицу Λ $\pi_0 = \pi_k = -\frac{1}{2}$, заменим равные нулю первые два элемента первой строки Θ на $-6/h_1^2$ и $6/h_1^2$ соответственно, аналогично заменим равные нулю последние два элемента последней строки Θ соответственно на $6/h_k^2$ и $-6/h_k^2$ и определим \mathbf{Z} так же, как и в предыдущем случае (с той лишь разницей, что $z_0 = -6y'_0/h_1$ и

$z_k = 6y_k^i/h_k$. Тогда полученные в первом случае уравнения (26)–(28) останутся справедливыми.

Третий тип граничных условий имеет смысл использовать, если мы не хотим заранее налагать на сплайн никаких априорных ограничений. Если мы при этом согласны ввести две дополнительные степени свободы, можно поступать следующим образом.

Определим новую сетку $\Delta^* = \{x_0^* < x_1^* < \dots < x_{k+2}^*\}$, которая получится из сетки Δ определения 3.1 путем добавления двух «псевдоузлов» x_1^* и x_{k+1}^* на первый и последний интервалы Δ . Соответствие между узлами Δ и остальными k узлами Δ^* задается следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{x}_0 &= x_0^*; \\ \bar{x}_i &= x_{i+1}^* \quad (i = 1, 2, \dots, k-1); \\ \bar{x}_k &= x_{k+2}^*.\end{aligned}$$

Значения ординат оцениваются в двух псевдоузлах точно так же, как и во всех остальных, однако эти узлы отличаются от всех прочих одним дополнительным требованием, а именно требуется, чтобы кривые над интервалами $[x_0^*, x_1^*]$ и $[x_k^*, x_{k+2}^*]$ были полиномами, т. е. не разрешается, чтобы функция $S_{\Delta}'''(x)$ в точках x_1^* и x_{k+1}^* претерпевала скачок. На интуитивном уровне это означает, что задание граничных условий заменяется оцениванием еще двух значений ординат — по одному на первом и последнем интервалах исходной сетки Δ .

Легко показать, что введение таких граничных условий приводит к соотношениям:

$$2M_0^* - 2\left(1 + \frac{h_1^*}{h_2^*}\right)M_1^* + 2\frac{h_1^*}{h_2^*}M_2^* = 0; \quad (29)$$

$$2\frac{h_{k+2}^*}{h_{k+1}^*}M_k^* - 2\left(1 + \frac{h_{k+2}^*}{h_{k+1}^*}\right)M_{k+1}^* + 2M_{k+2}^* = 0, \quad (30)$$

где

$$h_i^* = x_i^* - x_{i-1}^* \quad (i = 1, 2, \dots, k+2),$$

а M_i^* ($i = 0, 1, \dots, k+2$) — значения вторых производных сплайна в узлах Δ^* . После этого формулы (29) и (30) можно использовать точно так же, как и в разделе 3.1, определив Λ^* , Θ^* , \mathbf{M}^* и \mathbf{y}^* аналогично (5)–(8). Единственное отличие, не считая увеличения размерности с $k+1$ до $k+3$, заключается в том, что третий элемент первой строки Λ^* не равен нулю, а имеет вид $2h_1^*/h_2^*$, а третий элемент с конца последней строки Λ^* также отличен от нуля и равен $2h_{k+2}^*/h_{k+1}^*$. Кроме того, $\pi_0 = 1 + h_1^*/h_2^*$ и $\pi_{k+2} = 1 + h_{k+2}^*/h_{k+1}^*$.

Помимо граничных условий всех этих типов для левого конца часто оказывается полезным еще один способ. Если $\bar{x}_0 > 0$, то сплайн $S_{\Delta}(x)$ можно продолжить за начало координат, заменив (3) выражением

$$M_0 = \pi_0 M_1 + \mu_1 y_0 + \mu_2 y_1,$$

где

$$\pi_0 = \frac{x_1 - 2x_0}{x_0 - 2x_1} \quad (-2 < \pi_0 < 1),$$
$$\mu_1 = \frac{-6}{x_1^2 - h_1^2}, \quad \mu_2 = \frac{6x_0}{x_1(x_1^2 - h_1^2)}.$$

Подставляя это значение M_0 в (44) при $j = 1$, можно получить $S_\Delta(0) = 0$. При этом, если не считать замены первых двух элементов первой строки Θ (которые были нулевыми) на $2\mu_1$ и $2\mu_2$ соответственно, выкладки не меняются.

3.9. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КУБИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ

Зачастую при выявлении временного тренда в совокупности ежемесячных или ежеквартальных наблюдений желательно уметь отделять сезонные эффекты, которые повторяются каждые двенадцать месяцев (во втором варианте — каждые четыре квартала). В таких случаях эти сезонные эффекты можно выделить путем специального выбора граничных условий, используя для этого определяемый далее периодический кубический сплайн, а затем наложить его на общий временной тренд. Пример успешного применения такого подхода приводится Уоттсом [171]. В этом случае общий временной тренд (от года к году) описывается обычным кубическим сплайном, на который налагается периодический кубический сплайн с шагом в один месяц.

Мы будем проводить выкладки по образцу раздела 3.1 и начнем со следующего определения.

Определение 3.2. Кубический сплайн $S_\Delta(x)$, соответствующий определению 3.1, называется *периодическим* с периодом $(\bar{x}_k - \bar{x}_0)$ тогда и только тогда, когда

$$S_\Delta^{(m)}(\bar{x}_0) = S_\Delta^{(m)}(\bar{x}_k) \quad (m=0, 1, 2). \quad (31)$$

В противном случае $S_\Delta(x)$ называется *непериодическим*.

В некотором смысле соотношение (31) играет для периодического кубического сплайна роль граничного условия. Поэтому при задании сетки Δ , вектора значений ординат \underline{y} (с условием $y_0 = y_k$), уравнение (31) определяет кубический сплайн однозначно.

Математическое выражение для периодического кубического сплайна можно, как в разделе 3.1, получить следующим образом¹⁷. Условия непрерывности (31) дают систему из $k - 1$ одновременных уравнений с k неизвестными M_1, M_2, \dots, M_k ($M_0 = M_k$ в силу (31)). Поскольку интуитивный смысл (31) заключается в том, что кубический сплайн в периодическом варианте «начинается» в \bar{x}_0 таким же образом, каким он «кончается» в \bar{x}_k (т. е. если график $S_\Delta(x)$ сдвинуть параллельно самому себе вдоль оси x на $\bar{x}_k - \bar{x}_0$, то соединение в точке \bar{x}_k будет «гладким»), это означает, что условие непрерывности (1) должно вы-

¹⁷ См., например, [2, с. 11—12] или [101, с. 70].

полняться и при $j = k$. Следовательно,

$$(1 - \lambda_k) M_{k-1} + 2M_k + \lambda_k M_1 = \frac{6y_{k-1}}{h_k(h_k + h_1)} - \frac{6y_k}{h_k h_1} + \frac{6y_1}{h_1(h_k + h_1)}, \quad (32)$$

где $\lambda_k = h_1/(h_k + h_1)$. Далее аналогично (5) и (6) определим две матрицы размерности $k \times k$:

$$\tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 - \lambda_1 \\ 1 - \lambda_2 & 2 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda_3 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & \lambda_{k-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 - \lambda_{k-1} & 2 & \lambda_{k-1} \\ \lambda_k & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 - \lambda_k & 2 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{\Theta} = \begin{bmatrix} \frac{6}{h_1 h_2} & \frac{6}{h_2(h_1 + h_2)} & 0 & \dots \\ \frac{6}{h_2(h_2 + h_3)} & \frac{-6}{h_2 h_3} & \frac{6}{h_3(h_2 + h_3)} & \dots \\ 0 & \frac{6}{h_3(h_3 + h_4)} & \frac{-6}{h_3 h_4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{6}{h_1(h_k + h_1)} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{6}{h_1(h_1 + h_2)} & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \frac{-6}{h_{k-2} h_{k-1}} & \frac{6}{[h_{k-1}(h_{k-2} + h_{k-1})]} & 0 & \\ \frac{6}{h_{k-1}(h_{k-1} + h_k)} & \frac{-6}{h_{k-1} h_k} & \frac{6}{h_k(h_{k-1} + h_k)} & \\ 0 & \frac{6}{h_k(h_k + h_1)} & \frac{-6}{h_k h_1} & \end{bmatrix}.$$

Определим также два вектор-столбца:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{M}} &= [M_1, M_2, \dots, M_k]'; \\ \tilde{\mathbf{y}} &= [y_1, y_2, \dots, y_k]'.\end{aligned}$$

Теперь условия непрерывности (1) и (32) можно сокращенно записать так:

$$\tilde{\Lambda}\tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\Theta}\tilde{\mathbf{y}}. \quad (33)$$

Поскольку матрица $\tilde{\Lambda}$ удовлетворяет условиям теоремы Гершгорина, она невырождена. Стало быть, она имеет обратную и уравнение (33) можно решить¹⁸:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{\Theta}\tilde{\mathbf{y}}. \quad (34)$$

Чтобы аналогично (13) выразить периодический кубический сплайн через вектор значений абсцисс $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]'$, определим, подобно (11) и (12), две матрицы размерности $n \times k$: $\tilde{\mathbf{P}} = [\tilde{p}_{im}]$ и $\tilde{\mathbf{Q}} = [\tilde{q}_{im}]$. А именно при $\bar{x}_{j-1} \leq \xi_i \leq \bar{x}_j$ ($i = 1, 2, \dots, n, j = 2, 3, \dots, k$) положим

$$\tilde{p}_{im} = \begin{cases} (\bar{x}_j - \xi_i)[(\bar{x}_j - \xi_i)^2 - h_j^2]/6h_j & \text{при } m = j-1; \\ (\xi_i - \bar{x}_{j-1})[(\xi_i - \bar{x}_{j-1})^2 - h_j^2]/6h_j & \text{при } m = j; \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases} \quad (35)$$

$$\tilde{q}_{im} = \begin{cases} (\bar{x}_j - \xi_i)/h_j & \text{при } m = j-1; \\ (\xi_i - \bar{x}_{j-1})/h_j & \text{при } m = j; \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (36)$$

а при $j = 1$ положим

$$\tilde{p}_{im} = \begin{cases} (\bar{x}_1 - \xi_i)[(\bar{x}_1 - \xi_i)^2 - h_1^2]/6h_1 & \text{при } m = k; \\ (\xi_i - \bar{x}_0)[(\xi_i - \bar{x}_0)^2 - h_1^2]/6h_1 & \text{при } m = 1; \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases} \quad (37)$$

$$\tilde{q}_{im} = \begin{cases} (\bar{x}_1 - \xi_i)/h_1 & \text{при } m = k; \\ (\xi_i - \bar{x}_0)/h_1 & \text{при } m = 1; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (38)$$

Теперь с помощью (34)–(38) и (44) получаем, что

$$\begin{aligned}S_\Delta(\xi) &= \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{y}} = \\ &= (\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{\Theta} + \tilde{\mathbf{Q}})\tilde{\mathbf{y}} = \\ &= \tilde{\mathbf{W}}\tilde{\mathbf{y}},\end{aligned}$$

¹⁸ В случае периодического кубического сплайна обратная матрица $\tilde{\Lambda}^{-1}$ представляет особый интерес, если все интервалы Δ имеют одинаковую длину. В этом случае любая строка $\tilde{\Lambda}^{-1}$ может быть получена сдвигом каждого элемента предыдущей строки на одно место. Более подробное обсуждение см. в [2, с. 34–42].

где преобразованная матрица данных \tilde{W} размерности $n \times k$ задается выражением

$$\tilde{W} = \tilde{P}\tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{\Theta} + \tilde{Q}. \quad (39)$$

Конечно, чаще всего используется периодический кубический сплайн «месячного» характера, который имеет сетку $\Delta = \{0, 3, 6, 9, 12\}$. Поскольку этот случай часто встречается на практике, приводим результат вычисления \tilde{W} по формуле (39) в этом частном случае:

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,000 \\ 0,3704 & -0,05556 & -0,1111 & 0,7963 \\ 0,7963 & -0,1111 & -0,05556 & 0,3704 \\ 1,000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,7963 & 0,3704 & -0,05556 & -0,1111 \\ 0,3704 & 0,7963 & -0,1111 & -0,05556 \\ 0,0000 & 1,000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,1111 & 0,7963 & 0,3704 & -0,05556 \\ -0,05556 & 0,3704 & 0,7963 & -0,1111 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,000 & 0,0000 \\ -0,05556 & -0,1111 & 0,7963 & 0,3704 \\ -0,1111 & -0,05556 & 0,3704 & 0,7963 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,000 \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Если периодический кубический сплайн применяется в модели, в которой имеются другие независимые переменные (например, долгосрочный временной тренд), необходимо проявлять осторожность с тем, чтобы не допустить появления точной коллинеарности с содержащимся в кубическом сплайне свободным членом. Мы отложим более подробное рассмотрение этого вопроса до раздела 8.3; отметим лишь, что этого можно избежать, опустив один из столбцов матрицы \tilde{W} .

3.10. ВЫЧИСЛЕНИЕ $\Lambda^{-1}\Theta$ В НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯХ

Поскольку в большинстве экономических приложений используют кубические сплайны, построенные по сетке с небольшим числом отрезков, удобно иметь под рукой матрицу $\Lambda^{-1}\Theta$, заданную в явном виде. Это облегчит построение преобразованной матрицы данных W (см. формулу (14)) и проверку гипотез, проводимую в соответствии с методикой, описанной в разделах 3.6 и 3.7.

При $k = 2$ (т. е. в случае двух отрезков) и граничных условиях (3) и (4) легко показать, что

$$\Lambda^{-1}\Theta = d \begin{bmatrix} \pi_0 h_2 & -\pi_0 (h_1 + h_2) & \pi_0 h_1 \\ h_2 & -(h_1 + h_2) & h_1 \\ \pi_k h_2 & -\pi_2 (h_1 + h_2) & \pi_2 h_1 \end{bmatrix}, \quad (41)$$

где $d = [h_1 h_2 \{(2 + \pi_0) h_1 + (2 + \pi_2) h_2\}]^{-1}$. Ясно, что в случае естественного кубического сплайна, когда $\pi_0 = \pi_2 = 0$, матрица (41) существенно упрощается.

При $k = 3$ и граничных условиях (3) и (4) можно показать, что

$$\Lambda^{-1}\Theta = \begin{bmatrix} h_2 h_3 d_2 - h_3 [d_2 (h_1 + h_2) - h_1 h_2] & h_1 [h_3 d_2 + h_2 (h_2 + h_3)] - h_2^2 h_1 \\ -h_2^2 h_3 & h_3 [h_1 d_1 + h_2 (h_1 + h_2)] - h_1 [d_1 (h_1 + h_2) - h_2 h_3] & h_1 h_2 d_2 \end{bmatrix},$$

где $d_1 = 2(h_1 + h_2) + \pi_0 h_1$, $d_2 = 2(h_2 + h_3) + \pi_2 h_3$, а

$$D = \frac{6}{h_1 h_2 h_3 (d_1 d_2 - h_2^2)} \begin{bmatrix} \pi_0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \pi_3 \end{bmatrix}.$$

В заключение заметим, что если сетку $\Delta = \{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\}$ «раздуть» до сетки $\Delta_\alpha = \{\alpha \bar{x}_0, \alpha \bar{x}_1, \dots, \alpha \bar{x}_k\}$, где α — некоторая скалярная величина, то для того, чтобы построить кубический сплайн над сеткой Δ_α , нет нужды проводить все вычисления заново. Матрица преобразования W не меняется. Это означает, что строка матрицы, которая построена для кубического сплайна над сеткой Δ , соответствующая некоторому значению абсциссы x , полностью идентична строке, соответствующей значению абсциссы αx в матрице, построенной для кубического сплайна над сеткой Δ_α .

3.11. АЛЬТЕРНАТИВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ $S_\Delta(x)$

Представление (13), которое линейно выражает $S_\Delta(x)$ через вектор значений ординат y , удобно для целей оценивания, однако в других случаях полезно представить кубический сплайн в ином виде. Например, иногда желательно подчеркнуть «кусочно-кубический» характер $S_\Delta(x)$ и явно вычислить коэффициенты кубической параболы, соответствующей каждому отрезку. Запишем $S_\Delta(x)$ при $\bar{x}_{j-1} \leq x \leq \bar{x}_j$ ($j = 1, 2, \dots, k$) в виде кубического многочлена от $(x - \bar{x}_{j-1})$, т. е.

$$S_\Delta(x) = a_j + b_j(x - \bar{x}_{j-1}) + c_j(x - \bar{x}_{j-1})^2 + d_j(x - \bar{x}_{j-1})^3.$$

Тогда с помощью формулы (44) можно показать, что

$$\begin{aligned} a_j &= y_{j-1}; \\ b_j &= \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} - \frac{h_j(M_j + 2M_{j-1})}{6}; \\ c_j &= M_{j-1}/2; \quad d_j = (M_j - M_{j-1})/6h_j. \end{aligned}$$

3.12. СВОЙСТВО НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Как мы уже отмечали в главе 1, в чертежном деле сплайн как инструмент для приближенных построений используется уже давно. Если считать такой физический сплайн равномерно гибким, то в изогнутом состоянии его потенциальная энергия пропорциональна интегралу от квадрата кривизны по длине, т. е. если сплайн изогнут вдоль графика функции $y = f(x)$, то его потенциальная энергия пропорциональна величине

$$\int \frac{[f''(x)]^2}{[1 + f'(x)]^{5/2}} dx. \quad (42)$$

При любых наложенных на него связях чертежный сплайн принимает форму, минимизирующую выражение (42).

Математический сплайн имеет свойство, подобное этому свойству чертежного сплайна, с той лишь разницей, что опускается знаменатель подынтегрального выражения (42). На самом деле это свойство присуще всем сплайн-функциям нечетного порядка, и с его помощью можно получить альтернативное определение таких функций (см. [84, с. 163—165]). Здесь мы ограничимся формулировкой следующей теоремы, отсылая читателя за подробностями (включая доказательства) к работе [84].

Теорема 3.1. (Свойство наилучшего приближения)

Пусть $\bar{x}_0 < \bar{x}_1 < \dots < \bar{x}_k$ — множество точек оси абсцисс, а y_0, y_1, \dots, y_k ($k \geq 2$) — соответствующие значения ординат. Рассмотрим задачу:

найти

$$\min_{f(x)} \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_k} [f''(x)]^2 dx$$

в классе функций $f(x) \in C^2[\bar{x}_0, \bar{x}_k]$ при условии $f(\bar{x}_j) = y_j$ ($j = 0, 1, \dots, \dots, k$). Тогда решением этой задачи будет кубический сплайн $S_\Delta(x)$, интерполирующий значения y_j , причем

$$S_\Delta''(\bar{x}_0) = S_\Delta''(\bar{x}_k) = 0.$$

Другими словами, $S_\Delta(x)$ есть естественный кубический сплайн, интерполирующий значения y_j .

Поскольку теорема 3.1 похожа на «чертежную» задачу минимизации (42), она еще называется свойством минимальной кривизны¹⁹. В этом смысле теорема 3.1 утверждает, что естественный кубический сплайн является «самой гладкой» функцией, проходящей через данные точки. Приложения теоремы 3.1 можно найти в разделе 3.13 и в главе 6.

Хэндскомб [84, с. 166—167] рассматривает также обобщение теоремы 3.1 на случай сглаживания экспериментальных данных²⁰. Если в величины y_j входит некоторый случайный шум (в отличие от задачи аппроксимации с точными условиями), то минимизируемый теоремой 3.1 функционал можно заменить следующим:

$$\int_{x_0}^{\bar{x}_k} [f''(x)]^2 dx + \lambda \sum_{i=0}^k (f(\bar{x}_i) - y_i)^2,$$

¹⁹ Хэндскомб [84] рассматривает обобщения теоремы 3.1 на сплайн-функции $(2n - 1)$ -го порядка. В этом случае в минимизируемый функционал входит интеграл от квадрата n -й производной.

²⁰ См. также работу Уабы и Уолда [169]. Кроме того, Кимелдорф и Уаба [105] показали, что применение сплайнов для сглаживания и интерполяции данных эквивалентно предположению, что данные генерируются некоторым случайным процессом с нулевым средним значением и некоторым априорным условием на ковариацию.

где положительная константа λ выбирается так, чтобы установить правильное соотношение между гладкостью функции $f(x)$ и точностью ее соответствия данным наблюдений. Можно показать, что функция, которая минимизирует новый функционал, вновь является сплайновой функцией, но вместо условия $f(\bar{x}_j) = \bar{y}_j$ ($j = 0, 1, \dots, k$) она удовлетворяет условию

$$f'''(\bar{x}_j^+) - f'''(\bar{x}_j^-) = -\lambda [f(\bar{x}_j) - \bar{y}_j].$$

3.13. ОПТИМАЛЬНАЯ ТРАЕКТОРИЯ РОСТА ОБЪЕМА ДЕНЕЖНОЙ МАССЫ ПРИ НАЛИЧИИ ЦЕЛЕВЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

В литературе по теории денежного обращения ведется бесконечная дискуссия между последователями Милтона Фридмана, сторонника постоянного и умеренного увеличения находящейся в обращении денежной массы, и теми, кто считает, что объем денежной массы должен использоваться в качестве инструмента финансовой политики для достижения определенных экономических показателей (например, заданных значений национального дохода и занятости). Многие экономисты занимают промежуточную между этими двумя направлениями позицию. Они, с одной стороны, признают потенциальную выгоду использования объема денежной массы для решения экономико-политических задач, а с другой стороны, опасаются (говоря об индуцированной цикличности) появления значительных флуктуаций в скорости роста объема денежной массы. В этом разделе предлагается траектория роста объема денежной массы, которая является оптимальной в рамках набора предположений, соответствующих взглядам представителей этого промежуточного направления.

Предположим, что лицо, принимающее решение, хочет добиться, чтобы объем денежной массы (определенный любым образом) в моменты времени $\bar{t}_0 < \bar{t}_1 < \dots < \bar{t}_k$ равнялся e^{ui} ($i = 0, 1, \dots, k$), где $k \geq 2$. Эти планируемые значения могли быть получены в виде решения некоторой строгой математической задачи оптимального управления, а могут и просто отражать субъективное мнение ответственного лица. Точное их происхождение нас здесь не касается²¹. В любом случае предположим, что лицо, принимающее решение, следует «псевдофридмановской» концепции и требует «минимизации» колебаний в скорости роста объема денежной массы, но при условии достижения поставленных целевых значений. Такой порядок предпочтений, при котором стабильность скорости роста на втором месте после достижения запланированных целевых показателей, по-видимому, соответствует взглядам экономистов «промежуточного» направления.

²¹ Неявно предполагается, что лицо (или организация), принимающее решение (например, федеральная резервная система), в состоянии добиться выполнения поставленных задач. По мнению Фридмана [62], «ни один серьезный исследователь вопросов денежного обращения — независимо от его политических взглядов — не отрицает того, что федеральная резервная система может, если пожелает, контролировать объем денежной массы. Она, конечно, не сможет обеспечить планируемую скорость роста по дням и неделям, но может делать это с большой точностью от месяца к месяцу и от квартала к кварталу».

Стоящая перед лицом, принимающим решение, дилемма — как выбрать оптимальную траекторию $e^{f(t)}$ таким образом, чтобы она достигала целевых показателей, но при этом минимизировала колебания скорости роста, — может быть математически сформулирована следующим образом: найти

$$\min_{f(t)} \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_k} |f''(t)|^2 dt \quad (43)$$

при условии $e^{f(\bar{t}_i)} = e^{y_i}$ ($i = 0, 1, \dots, k$).

Функция потерь (43) оценивает колебания скорости роста (т. е. $f''(t)$) на временном промежутке $[\bar{t}_0, \bar{t}_k]$ обычным квадратичным образом и, по всей вероятности, дает разумный критерий с точки зрения псевдофридмановской концепции.

Очевидным решением этой задачи является функция, начинающаяся со значения e^{y_0} , растущая далее с постоянной скоростью до e^{y_1} , затем — с требуемой постоянной скоростью до e^{y_2} и т. д. Такая траектория означала бы, что $f(t)$ имеет вид кусочно-линейной функции, которая, с учетом условия непрерывности, была бы линейным сплайном. Хотя интеграл (43) в этом случае равен нулю, скорость роста оказывается не определенной в точках $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_{k-1}$, поскольку, вообще говоря, в этих точках скорость роста претерпевает скачки. Наличие таких скачкообразных разрывов трудно допустить по двум причинам. Во-первых, сомнительно, можно ли на практике добиться таких мгновенных изменений скорости роста. Во-вторых, вызывают опасения возможные последствия таких внезапных и резких изменений скорости роста. Поэтому желательно, по-видимому, ограничиться классом функций $f(t)$, которые «ведут себя хорошо», а именно классом непрерывных функций с непрерывными первыми и вторыми производными на $[\bar{t}_0, \bar{t}_k]$, т. е. $f(t) \in C^2[\bar{t}_0, \bar{t}_k]$. Это обеспечивает «гладкость» скорости роста.

Если ограничиться рассмотрением функций из класса $C^2[\bar{t}_0, \bar{t}_k]$, то решением задачи (43) будет кубический сплайн, интерполирующий значения ординат y_0, y_1, \dots, y_k . Для доказательства этого утверждения достаточно воспользоваться теоремой 3.1 из раздела 3.12. Таким образом, свойство «наилучшего приближения», или свойство «минимальной кривизны», которым обладают кубические сплайны и которое уже давно является одной из причин применения кубических сплайнов в теории приближений, дает теперь и решение поставленной выше самостоятельной экономической задачи.

Как уже говорилось, точное происхождение целевых значений e^{y_i} ($i = 1, 2, \dots, k$) для нас здесь не важно. Их выбор скорее всего весьма сложным образом отражает взгляды принимающего решения лица на сезонные колебания денежного спроса и на желательность комплексного применения валютно-финансовых стабилизационных мер. Рассмотрим следующую ситуацию. В момент \bar{t}_0 (июль 1972 г.) горизонт прогноза для лица, принимающего решение, равен одному году. У него имеются целевые значения объема денежной массы (M_2 , определенное

без учета сезонных колебаний) на конец каждого из четырех последующих кварталов, т. е. в точках $\bar{t}_1 = 3$ (октябрь 1972 г.), $\bar{t}_2 = 6$ (январь 1973 г.), $\bar{t}_3 = 9$ (апрель 1973 г.) и $\bar{t}_4 = 12$ (июль 1973 г.), где время t измеряется в месяцах. Из каких-то соображений были выбраны следующие целевые значения:

$$e^{y_0} = 503,6; e^{y_1} = 513,4;$$

$$e^{y_2} = 532,0;$$

$$e^{y_3} = 540,1; e^{y_4} = 547,1^{22}.$$

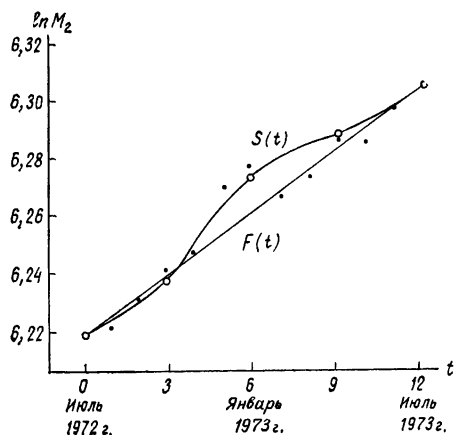


Рис. 3.7. Сравнение траекторий роста

При задании этих целевых значений оптимальная траектория $S(t)$, дающая решение задачи (43), изображена на рис. 3.7, где показаны также траектория постоянной скорости роста $F(t)$, целевые показатели (обозначенные кружками) и реальные значения наблюдений M_2 (обозначенные точками).

Хотя естественный кубический сплайн является просто кусочно-кубической функцией от времени, в этой задаче его гораздо проще представить с помощью самих целевых значений. Применяя формулы из раздела 3.1, сплайн $S(t)$ можно в каждый момент времени записать в виде линейной функции от логарифмов целевых значений, а именно

$$S(t) = wy,$$

где $y = [y_0, y_1, \dots, y_k]'$ есть вектор целевых показателей, заданных натуральными логарифмами, а $w = [w_0, w_1, \dots, w_k]$ — вектор-строка, элементы которой зависят от t и от узлов $\bar{t}_0, \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_k$. Свойство линейной зависимости $S(t)$ от y дает возможность легко проанализировать чувствительность оптимальной траектории к изменениям значений целевых показателей. А именно обозначим через Δ оператор конечного приращения $\Delta S(t) = w_0 \Delta y_0 + w_1 \Delta y_1 + \dots + w_k \Delta y_k$. Поскольку весовые коэффициенты w_0, w_1, \dots, w_k зависят только от t и от узлов, нет нужды вычислять их заново для каждого нового набора целевых значений.

Подведем итоги. В этом разделе предложена траектория роста объема денежной массы, которая оптимальна при выполнении условий, со-

²² Эти целевые значения были получены следующим образом: (1) в точках, соответствующих июлю 1972 г. и июлю 1973 г., значения приведенного и неприведенного рядов были положены равными друг другу, (2) для промежуточных кварталов были вычислены отношения неприведенных значений к приведенным, (3) затем эти отношения были умножены на постоянную величину скорости роста (заданную e^{y_0} и e^{y_4}) в соответствующем квартале. Чувствительность полученной траектории роста к выбору этих целевых значений обсуждается далее.

ответствующих взглядам многих экономистов, которые не отдают предпочтения ни сторонникам целеустремленной валютной политики, ни сторонникам постоянной скорости роста. Что касается теории сплайнов, то было показано, что целесообразность применения сплайн-функций может быть оправдана экономической теорией. В самом деле, при вытекающих из (43) ограничениях оптимальной траекторией является естественный кубический сплайн. Несколько менее очевидно истолкование этой задачи с точки зрения «структурных изменений», а именно траектория роста, которую выбирает лицо, принимающее решение, должна таким образом претерпевать изменение в каждой внутренней узловой точке (в терминах третьей производной), чтобы можно было выйти в оставшиеся целевые точки и чтобы при этом общая траектория была гладкой в смысле (43).

3.14. ПРИЛОЖЕНИЕ

В разделе 3.1 были опущены подробности вывода из определения 3.1 условий непрерывности (1). Это приложение призвано до некоторой степени восполнить этот пробел.

Поскольку вторая производная кубического многочлена является линейной функцией, то, используя обозначения раздела 3.1 и уравнение прямой, проходящей через две данные точки, получаем для

$$\bar{x}_{j-1} \leq x \leq \bar{x}_j \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

$$S''_{\Delta}(x) = \left[\frac{\bar{x}_j - x}{h_j} \right] M_{j-1} + \left[\frac{x - \bar{x}_{j-1}}{h_j} \right] M_j. \quad (44)$$

Дважды интегрируя выражение (44) и определяя константы интегрирования с помощью условия (3) определения 3.1, получаем при

$$\bar{x}_{j-1} \leq x \leq \bar{x}_j \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

$$S'_{\Delta}(x) = \left[\frac{h_j}{6} - \frac{(\bar{x}_j - x)^2}{2h_j} \right] M_{j-1} + \left[\frac{(x - \bar{x}_{j-1})^2}{2h_j} - \frac{h_j}{6} \right] M_j + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}; \quad (45)$$

$$S_{\Delta}(x) = \frac{\bar{x}_j - x}{6h_j} [(\bar{x}_j - x)^2 - h_j^2] M_{j-1} + \frac{x - \bar{x}_{j-1}}{6h_j} + [(x - \bar{x}_{j-1})^2 - h_j^2] M_j + \left[\frac{\bar{x}_j - x}{h_j} \right] y_{j-1} + \left[\frac{x - \bar{x}_{j-1}}{h_j} \right] y_j. \quad (46)$$

Единственными неизвестными величинами в (44)—(46) являются моменты M_j ($j = 0, 1, \dots, k$), которые можно без большого труда определить. Из (45) видно, что односторонние пределы производной, вычисленные в узлах \bar{x}_j ($j = 1, 2, \dots, k - 1$) равны:

$$S'_{\Delta}(\bar{x}_j) = h_j M_{j-1}/6 + h_j M_j/3 + (y_j - y_{j-1})/h_j; \quad (47)$$

$$S'_{\Delta}(\bar{x}_j) = -h_{j+1} M_j/3 - h_{j+1} M_{j+1}/6 + (y_{j+1} - y_j)/h_{j+1}. \quad (48)$$

Так как функция $S'_{\Delta}(x)$ непрерывна, выражения (47) и (48) можно приравнять друг другу, откуда и вытекают использованные при вычислении моментов условия непрерывности (1).

4.1. ВВЕДЕНИЕ

Функциональную зависимость некоторой переменной y от двух независимых переменных u и v часто представляют с помощью очень популярной билинейной формы:

$$y = a + bu + cv + duv. \quad (1)$$

Функция такого вида дает возможность описать как «главные части вклада» каждой из независимых переменных в величину итогового значения функции (эти «главные воздействия» представлены членами bu и cv), так и «эффект взаимодействия» независимых переменных, которому соответствует член duv . Разумеется, выражение (1) может правильно описывать ситуацию лишь в той или иной части плоскости (u, v), и оно вовсе не должно выполняться во всех точках плоскости. Тем не менее иногда y можно считать кусочной функцией от u и v , причем каждый из ее «кусков» имеет вид (1), но коэффициенты билинейной формы могут изменяться при переходе из одной части плоскости в другую. Если при этом, во-первых, куски, на которые разбита плоскость, представляют собой фиксированные прямоугольники, и, во-вторых, вся поверхность непрерывна (т. е. отдельные куски соединены друг с другом), то полученная поверхность является графиком *билинейного сплайна*.

В привлекательности билинейных сплайнов — с точки зрения удобства представления с их помощью экономических зависимостей — можно убедиться, рассмотрев следующие четыре примера.

1. Предположим, проводится анализ влияния таких величин, как возраст и уровень образования, на размер дохода или ставку заработной платы. В подобных задачах нередко целесообразно по-разному описывать соответствующие зависимости для разных возрастных групп (или групп, отличающихся по уровню образования). Именно с этой целью во многих работах, описанных в New Jersey — Pennsylvania Graduated Work Incentive Experiment Final Report, были успешно применены билинейные сплайны. Один пример такой работы будет приведен в разделе 4.4.

2. С помощью билинейных сплайнов в том же докладе были описаны и так называемые «эффекты воздействия эксперимента». А именно изучались эффекты воздействия экспериментальных программ налогообложения и гарантированных выплат на те или иные зависимые пере-

менные, причем такие эффекты описывались билинейными сплайнами, зависящими от уровня налогообложения и гарантий. Более подробное изложение этих вопросов читатель найдет в работах Уоттса [172] и Пуарье [131].

3. В главе 5 мы рассмотрим понятие *сплайновой производственной функции Кобба—Дугласа* (сплайн Кобба—Дугласа). Эта функция возникает в тех случаях, когда эластичности выпуска относительно труда и капитала в обычной производственной функции Кобба—Дугласа являются ступенчатыми функциями, а не константами, а «параметры эффективности» выбираются так, чтобы полученная кусочная функция была непрерывна на всей плоскости входных параметров. Привлекательная черта сплайна Кобба—Дугласа заключается в возможности изменять величину отдачи от масштаба при переходе от одной прямоугольной области на плоскости входных параметров к другой. Тем самым допускается, чтобы кривая средних издержек имела U-образную форму. Если выразить сплайн Кобба—Дугласа через логарифмы затрат и выпуска, то он будет билинейным сплайном, в котором отсутствует член, описывающий эффекты взаимодействия, т. е. просто суммой двух билинейных сплайнов.

4. В работе [89] Хендрикс использует билинейный сплайн для исследования динамики ставки заработной платы в различных отраслях промышленности, представляя ее как функцию от степени концентрации производства и от уровня активности профсоюзов. Привлекательность такого подхода связана с тем, что на различных уровнях развития каждого из этих факторов воздействие активности профсоюзов и степени концентрации производства на величину ставки заработной платы описывается по-разному. В частности, в этой работе исследуется вопрос: зависит ли коэффициент взаимодействия тред-юнионизма и концентрации производства от уровня концентрации производства? Изложенная в разделе 4.3 процедура проверки гипотез иллюстрирует метод анализа таких вопросов.

В каждом из этих четырех примеров коэффициентам билинейной формы (1) можно дать содержательную экономическую интерпретацию и из теоретических соображений объяснить, почему эти коэффициенты могут претерпевать изменения при переходе независимых переменных с одного уровня на другой. Именно возможность дать этому переходу простую интерпретацию с экономической точки зрения делает билинейный сплайн столь привлекательным.

Закончив мотивировку целесообразности применения билинейных сплайнов, перейдем к краткому изложению содержания этой главы. В разделе 4.2 дается подробное математическое определение билинейного сплайна и приводятся два альтернативных способа его представления. В разделе 4.3 описываются процедуры проверки гипотез о возможном наличии «структурных изменений» различного типа, которые происходят при переходе от одного куска билинейного сплайна к другому. В разделе 4.4 введенные ранее (в разделах 4.2 и 4.3) понятия проиллюстрированы на примере конкретной задачи [133]. Наконец, в разделе 4.5 рассматриваются обобщения введенных понятий и обсуждаются некоторые часто встречающиеся практические проблемы.

4.2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Определение. Рассмотрим две сетки: $\Delta_U = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_{I-1}\}$ и $\Delta_V = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{J-1}\}$, элементы которых называются *узлами*. Эти две сетки определяют на плоскости (u, v) прямоугольную решетку, состоящую из IJ прямоугольников (как показано на рис. 4.1). Для каждой точки (u, v) определим преобразованные переменные:

$$\begin{aligned} u_1 = u, \quad u_i = \begin{cases} (u - \bar{u}_{i-1}), & \text{если } u > \bar{u}_{i-1} \\ 0, & \text{если } u \leq \bar{u}_{i-1} \end{cases} \quad (i = 2, 3, \dots, I); \\ v_1 = v, \quad v_j = \begin{cases} (v - \bar{v}_{j-1}), & \text{если } v > \bar{v}_{j-1} \\ 0, & \text{если } v \leq \bar{v}_{j-1} \end{cases} \quad (j = 2, 3, \dots, J); \\ w_{ij} = u_i v_j \quad (i = 1, 2, \dots, I; \quad j = 1, 2, \dots, J). \end{aligned} \quad (2)$$

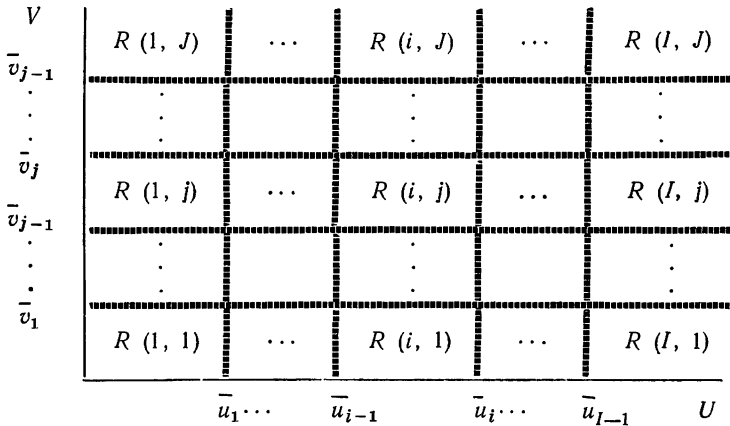


Рис. 4.1. Прямоугольная решетка, определяемая Δ_U и Δ_V

Из этих переменных построим несколько векторов:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= [u_1, u_2, \dots, u_I]; \quad \mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_J]; \\ \mathbf{w}_i &= [w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{iJ}] \quad (i = 1, 2, \dots, I); \\ \mathbf{w} &= [\mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2, \dots, \mathbf{w}'_I]. \end{aligned}$$

Пусть теперь даны векторы коэффициентов:

$$\begin{aligned} \alpha &= [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_I]'; \quad \delta = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_J]'; \\ \gamma_i &= [\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \dots, \gamma_{iJ}] \quad (i = 1, 2, \dots, I); \\ \gamma &= [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_I]' \end{aligned}$$

и свободный член θ . Функция y называется *билинейным сплайном* над Δ_U и Δ_V тогда и только тогда, когда

$$y = \theta + \mathbf{u}\alpha + \mathbf{v}\delta + \mathbf{w}\gamma. \quad (3)$$

Коэффициентам выражения (3) можно дать очень простую и полезную интерпретацию. Свободный член (3) представляет собой ту часть величины y , которая зависит от всех прочих объясняющих переменных модели (например, $\theta = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k$). Мы объединили все остальные объясняющие переменные в одну с той целью, чтобы сосредоточить внимание на плоскости (u, v) . Коэффициенты α_i ($i = 2, 3, \dots, I$) описывают происходящие в узлах сетки Δ_U изменения величины «главной части воздействия» переменной u на значение функции. Точно так же коэффициенты δ_j ($j = 2, 3, \dots, J$) определяют изменения величины «главной части воздействия» v на y , происходящие в узлах сетки Δ_V . Наконец, коэффициенты γ_{ij} ($i = 2, 3, \dots, I; j = 2, 3, \dots, J$) дают изменение величины «эффекта взаимодействия» переменных u и v , которое происходит на линиях решетки $u = \bar{u}_{i-1}$ и $v = \bar{v}_{j-1}$, ограничивающих прямоугольник $R(i, j)$. Аналогичный смысл имеют коэффициенты взаимодействия в первой «строке» и первом «столбце» всего массива прямоугольников.

Полную величину воздействия u и v в прямоугольнике $R(i, j)$ можно найти, складывая все предшествующие воздействия. А именно в прямоугольнике $R(i, j)$ полная величина «главной части воздействия» u равна $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i$, полная величина «главной части воздействия» v равна $\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_j$, а полный эффект взаимодействия определяется выражением

$$\sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j \gamma_{kl}. \quad (4)$$

Хотя представление билинейного сплайна формулой (3) удобно для целей регрессии (поскольку оно представляет y в виде линейной комбинации $(1 + I + J + IJ)$ неизвестных параметров, обозначенных нами через $\theta, \alpha, \delta, \text{ и } \gamma$), тем не менее оно до некоторой степени затемняет кусочный характер билинейного сплайна. Это можно исправить, определив $4IJ$ коэффициентов $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, I; j = 1, 2, \dots, J$) следующим образом. Пусть $(u, v) \in R(i, j)$ и положим, что

$$y = a_{ij} + b_{ij}(u - \bar{u}_{i-1}) + c_{ij}(v - \bar{v}_{j-1}) + d_{ij}(u - \bar{u}_{i-1})(v - \bar{v}_{j-1}), \quad (5)$$

где величины $\bar{u}_0 < \bar{u}_1$ и $\bar{v}_0 < \bar{v}_1$ выбираются произвольно. С интуитивной точки зрения привлекательность представления билинейного сплайна формулой (5) заключается в том, что над каждым прямоугольником $R(i, j)$ она определяет обычную билинейную поверхность, причем начало координат сдвигается в левый нижний угол $R(i, j)$, т. е. в точку $(\bar{u}_{i-1}, \bar{v}_{j-1})^1$. При таком представлении a_i

¹ При $i = j = 1$ началом отсчета служит точка (\bar{u}_0, \bar{v}_0) . Поэтому в тех случаях, когда по содержательным соображениям начало координат не представляет большого интереса (например, когда оно соответствует нулевому возрасту и нулевому уровню образования), можно путем разумного выбора \bar{u}_0 и \bar{v}_0 дать первому ряду и первому столбцу массива прямоугольников еще более простую интерпретацию.

есть значение y в точке $u = \bar{u}_{i-1}$ и $v = \bar{v}_{i-1}$, b_{ij} есть частная производная y по u при $v = \bar{v}_{j-1}$, c_{ij} — частная производная y по v при $u = \bar{u}_{i-1}$, а d_{ij} — коэффициент взаимодействия между u и v .

Эти $4IJ$ коэффициентов можно очень просто получить следующим способом². Определим матрицу коэффициентов размерности $(I+1) \times (J+1)$:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \theta & \delta_1 & \dots & \delta_J \\ \alpha_1 & \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1J} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_I & \gamma_{I1} & \dots & \gamma_{IJ} \end{bmatrix};$$

матрицу размерности $2I \times (I+1)$:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & \bar{u}_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \bar{u}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \bar{u}_2 & \bar{u}_2 - \bar{u}_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \bar{u}_{I-1} & \bar{u}_{I-1} - \bar{u}_1 & \bar{u}_{I-1} - \bar{u}_2 \dots & \bar{u}_{I-1} - \bar{u}_{I-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

а также матрицу размерности $(J+1) \times 2J$:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \bar{v}_0 & \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \dots & \bar{v}_{J-1} & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \bar{v}_2 - \bar{v}_1 & \dots & \bar{v}_{J-1} - \bar{v}_1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{v}_{J-1} - \bar{v}_2 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{v}_{J-1} - \bar{v}_{J-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда можно показать, что

$$U \Pi V = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

² На этот исключительно краткий способ вычисления коэффициентов впервые обратил внимание автора Гарольд Уоттс.

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1J} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{I1} & \dots & a_{IJ} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1J} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{I1} & \dots & c_{IJ} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1J} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{I1} & \dots & b_{IJ} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1J} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{I1} & \dots & d_{IJ} \end{bmatrix}.$$

4.3. ПРОВЕРКА НАЛИЧИЯ СТРУКТУРНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ

Если считать кусочный характер билинейного сплайна отражением происходящих на линиях решетки «структурных изменений», необходимо — прежде чем использовать этот сплайн в рамках регрессии — указать процедуру проверки статистической значимости этих изменений. Из-за того, что билинейный сплайн описывается большим числом параметров, приходится различать несколько типов структурных изменений. Как мы увидим, сложность процедуры проверки будет различной в зависимости от типа структурного изменения. Однако, поскольку билинейный сплайн линейно зависит от своих неизвестных параметров (при фиксированных узлах), можно применять классические процедуры проверки гипотез.

Построим соответствующую статистическую модель. Предположим (ради простоты), что θ является всего навсего обычным свободным членом, и добавим к (3) возмущающий член $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$, который не зависит от u и v . Пусть возмущающие члены независимы и пусть задана некоторая случайная выборка объемом $n > (1 + I + J + IJ)$, удовлетворяющая этому вероятностному условию. Тогда можно воспользоваться обычным методом наименьших квадратов и получить эффективные линейные несмещенные оценки $\hat{\theta}$, $\hat{\alpha}$, $\hat{\delta}$ и $\hat{\gamma}$.

Проверка того, происходит ли на том или ином отрезке линии решетки существенное изменение в величине какого-нибудь из главных воздействий, проводится очень просто. Например, главная часть воздействия переменной u в прямоугольнике $R(i, j)$ существенно отличается от воздействия u в прямоугольнике $R(i - 1, j)$ тогда и только тогда, когда оценка $\hat{\alpha}_i$ представляет собой значимую величину. Аналогично главная часть воздействия переменной v в прямоугольнике $R(i, j)$ существенно отличается от воздействия ее в прямоугольнике $R(i, j - 1)$ тогда и только тогда, когда значима величина $\hat{\delta}_j$.

Что касается эффекта взаимодействия, то его полная величина в прямоугольнике $R(i, j)$, задаваемая выражением (4), существенно отличается от полной величины эффекта взаимодействия в прямоугольнике $R(i, j - 1)$ тогда и только тогда, когда значима величина $\hat{\gamma}_{1j} + \hat{\gamma}_{2j} + \dots + \hat{\gamma}_{ij}$, а полный эффект взаимодействия в прямоугольнике $R(i, j)$ существенно отличается от этого эффекта в прямоугольнике $R(i - 1, j)$ тогда и только тогда, когда значима величина $\hat{\gamma}_{i1} + \hat{\gamma}_{i2} + \dots + \hat{\gamma}_{ij}$.

Как и можно было ожидать, процедура проверки значимости несколько усложняется при исследовании объединенного эффекта всех воздействий (т. е. если рассматриваются главные воздействия плюс эффект взаимодействия). Рассмотрим случай, когда необходимо сравнить поверхности над $R(i, j)$ и $R(i + 1, j)$. Если на линии $u = \bar{u}_i$ не происходит никакого структурного изменения, то поверхность над каждой внутренней точкой прямоугольника $R(i + 1, j)$ может быть получена продолжением поверхности, лежащей над $R(i, j)$. Если же над $R(i + 1, j)$ поверхность будет отличаться, то, как видно из формулы (3), эти две оценки вследствие наличия преобразованной переменной u_{i+1} будут различаться друг от друга на величину

$$\hat{\alpha}_{i+1}(u - \bar{u}_i) + \sum_{m=1}^j \hat{\gamma}_{i+1, m}(u - \bar{u}_i)(v - \bar{v}_{m-1}), \quad (7)$$

где $\bar{v}_0 = 0$. Таким образом, при переходе от $R(i, j)$ к $R(i + 1, j)$ структурного изменения не происходит тогда и только тогда, когда (7) равняется нулю.

Если (7) равно нулю, то разделим его (пользуясь тем, что $u > \bar{u}_i$) на выражение $(u - \bar{u}_i)$ и после этого преобразуем следующим образом:

$$\hat{\alpha}_{i+1} - \sum_{m=1}^j \hat{\gamma}_{i+1, m} \bar{v}_{m-1} + v \sum_{m=1}^j \hat{\gamma}_{i+1, m} = 0. \quad (8)$$

Поскольку соотношение (8) должно выполняться тождественно при любом v , оно справедливо тогда и только тогда, когда

$$\hat{\alpha}_{i+1} - \sum_{m=1}^j \hat{\gamma}_{i+1, m} \bar{v}_{m-1} = 0 \quad (9)$$

и

$$\sum_{m=1}^j \hat{\gamma}_{i+1, m} = 0. \quad (10)$$

Следовательно, нулевую гипотезу о том, что поверхности над $R(i, j)$ и $R(i + 1, j)$ представляют собой одну и ту же поверхность, можно отвергнуть в том и только в том случае, когда полученные при оценивании коэффициенты регрессии не удовлетворяют нулевой гипотезе, задаваемой ограничениями (9) и (10).

Аналогично можно легко показать, что куски над $R(i, j)$ и $R(i, j + 1)$ образуют одну и ту же поверхность тогда и только тогда, когда выполняются ограничения

$$\hat{\delta}_{j+1} - \sum_{m=1}^i \hat{\gamma}_{m, j+1} \bar{u}_{m-1} = 0 \quad (11)$$

и

$$\sum_{m=1}^i \hat{\gamma}_{m, j+1} = 0. \quad (12)$$

Следует отличать проверку того, образуют ли куски над $R(i, j)$ и $R(i + 1, j)$ одну и ту же поверхность, от проверки того, имеют ли все параметры, вводимые в узле \bar{u}_i , (а именно коэффициенты $\alpha_{i+1, 1}, \alpha_{i+1, 2}, \dots, \alpha_{i+1, j}$), нулевую величину. Последнее представляет собой проверку того, верно ли, что никакого структурного изменения не происходит на линии $u = u_i$ при всех $v \leq \bar{v}_j$, а не только при $\bar{v}_{j-1} \leq v \leq \bar{v}_j$. Другими словами, из-за того, что в билинейный сплайн входит эффект взаимодействия, процедура проверки наличия структурного изменения на линии $u = u_i$ зависит от области значений, которые может принимать v . Разумеется, аналогичные замечания справедливы и в случае проверки наличия структурного изменения на линии $v = \bar{v}_j$.

4.4. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ БИЛИНЕЙНЫХ СПЛАЙНОВ В УРАВНЕНИЯХ, ОПИСЫВАЮЩИХ ВЕЛИЧИНУ СТАВКИ ЗАРАБОТНОЙ ПЛАТЫ СРЕДИ НЕГРИТЯНСКОГО НАСЕЛЕНИЯ МУЖСКОГО ПОЛА

Чтобы продемонстрировать возможности применения билинейных сплайнов, в качестве примера приведем одну конкретную задачу из New Jersey—Pennsylvania Graduated Work Incentive Experiment Final Report. При получении «нормализованных» ставок заработной платы Пуарье и Уоттс [133] оценивали некоторое уравнение в приведенной форме, включавшее билинейный сплайн, с помощью которого описывалась зависимость ставки заработной платы от возраста и уровня образования. Не вдаваясь в ненужные подробности, отметим только, что ставка заработной платы считалась зависящей не только от возраста и уровня образования, но и от многих других социально-экономических и демографических показателей. Интересно, что некоторые из этих показателей также были представлены сплайн-функциями. Априори можно было ожидать наличия двух структурных изменений на оси возрастов. Первое из них соответствует достижению человеком так называемого «периода максимальной работоспособности», второе же должно наблюдаться при выходе из этого возраста. Поэтому в качестве узлов на оси возрастов были выбраны следующие точки: $u_1 = 25$ и $u_2 = 45$. На другой оси откладывался уровень образования, и здесь в качестве узла была выбрана точка $\bar{v}_1 = 8$, поскольку это значение соответствует окончанию восьмилетней школы, а этот факт мог сказаться на величине ставки заработной платы. В выборку не входили люди, окончившие колледж (двенадцатилетнее образование), и в связи с этим точка $v = 12$ не считалась узлом. Ожидалось, что возраст и уровень образования будут взаимодействовать, причем представлялось весьма правдоподобным, что для возрастной группы старше сорока пяти лет вид взаимодействия будет иным, чем во всех прочих группах. Кроме того, представлялось вероятным, что внутри этой старшей группы вид взаимодействия будет различным в зависимости от того, имеет данный человек полное восьмилетнее образование

или нет. Поэтому были введены следующие взаимодействия: $\omega_{11} = u_1v_1$, $\omega_{31} = u_3v_1$ и $\omega_{32} = u_3v_2$.

Выборка включала 1569 ежеквартальных наблюдений. Наблюдения касались негров-мужчин, занятых полное рабочее время (35—45 ч в неделю). Оцениваемая функция бралась в полулогарифмическом виде, причем зависимой переменной являлся логарифм ставки заработной платы, а чтобы учесть выборочный характер данных, была введена двухкомпонентная ошибка. Результаты приведены в

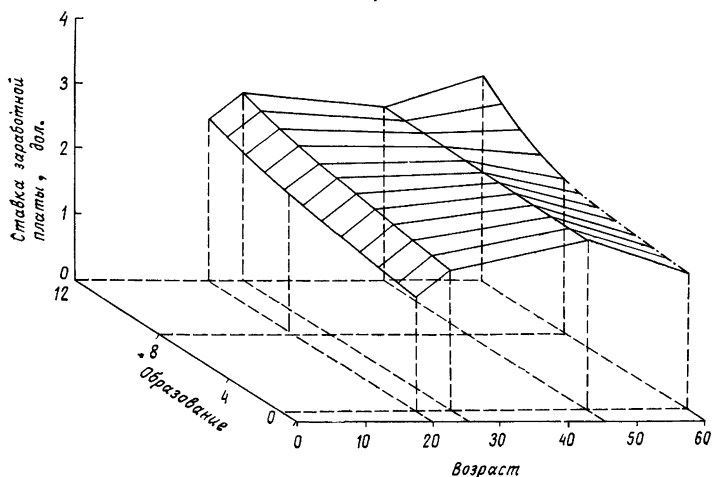


Рис. 4.2. График линейного сплайна, описывающего зависимость ставки заработной платы от возраста и уровня образования

табл. 6. Свободный член соответствует положению индивидуума, который проживал в Трентоне, до призыва в армию (август 1968 г.) работал в обрабатывающей промышленности, производящей товары длительного пользования, и жена которого не работала.

Полученная в результате оценивания поверхность изображена на рис. 4.2. Отметим, что на этом графике по вертикальной оси откладывается величина самой ставки заработной платы в долларах, а не ее логарифм. Чтобы подчеркнуть кусочный и билинейный характер результатов, с помощью формулы (6) были вычислены матрицы коэффициентов **A**, **B**, **C** и **D**, которые выписаны ниже. Заметим, что коэффициенты взаимодействия (задаваемые матрицей **D**) до перехода к старшей группе (сорок пять лет и более) не изменяются.

$$A = \begin{bmatrix} 0,2938 & 0,3184 \\ 0,3762 & 0,3954 \\ 0,4034 & 0,4008 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,01648 & 0,01539 \\ 0,001360 & 0,0002680 \\ -0,004710 & -0,003810 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 0,01231 & 0,01663 \\ 0,009583 & 0,01390 \\ -0,001337 & 0,002978 \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} -0,0005460 & -0,0005460 \\ -0,0005460 & -0,0005460 \\ 0,0004500 & 0,002243 \end{bmatrix}.$$

Хотя на изображенной на рис. 4.2 поверхности и видны довольно заметные изменения, необходимо провести проверку их значимости. Для возрастов меньше сорока пяти лет эта процедура упрощается, так как коэффициент эффекта взаимодействия остается постоянным. Значимость и знак оценки $\hat{\alpha}_2$ (см. табл. 6) говорят о том, что «главная часть воздействия» параметра возраста на ставку заработной платы для мужчин возрастной группы 25—45 лет будет существенно меньшей, чем для «относительно молодых» людей в возрасте до 25 лет (при этом не важно, каков их уровень образования). Оценка $\hat{\delta}_2$ получилась положительной, но, поскольку она не является значимой, нельзя сказать, что наличие восьмилетнего (или выше) образования оказывает *существенное* влияние на величину ставки заработной платы.

Таблица 6

Оценки коэффициентов регрессии

Коэффициент	Название и смысл переменных	Оценка и стандартная ошибка
$\hat{\theta}$	Свободный член	-0,1752
$\hat{\alpha}_1$	Главная часть воздействия возраста (u_1)	0,01976*** (0,006135)
$\hat{\alpha}_2$	Изменение при $u = 25$ (u_2)	-0,01512*** (0,005494)
$\hat{\alpha}_3$	Изменение при $u = 45$ (u_3)	-0,01205 (0,008424)
$\hat{\delta}_1$	Главная часть воздействия уровня образования (v_1)	0,02323* (0,01340)
$\hat{\delta}_2$	Изменение при $v = 8$ (v_2)	0,004315 (0,007404)
$\hat{\gamma}_{11}$	Эффект взаимодействия: $u_1 v_1$	-0,0005462* (0,0003080)
$\hat{\gamma}_{31}$	Эффект взаимодействия: $u_3 v_1$	0,0009957 (0,001289)
$\hat{\gamma}_{32}$	Эффект взаимодействия: $u_3 v_2$	0,001793 (0,003090)

Поскольку коэффициенты взаимодействия $\hat{\gamma}_{31}$ и $\hat{\gamma}_{32}$ могут ослабить или усилить изменения главных воздействий, проверка наличия структурных изменений для возрастной группы старше 45 лет проводится несколько сложнее. В этом случае необходима процедура проверки, соответствующая формулам (9)—(12). Результаты приведены в табл. 7 (проверки 7—9).

Таблица 7

Проверка с помощью *F*-критерия

	Объект проверки	Значение <i>F</i> -статистики
1	Наличие общего воздействия $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \delta_1 = \delta_2 = \gamma_{11} = \gamma_{31} = \gamma_{32} = 0$	3,652***
2	Наличие общего воздействия возраста $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \gamma_{11} = \gamma_{31} = \gamma_{32} = 0$	2,320**
3	Наличие главного воздействия возраста $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$	3,632**
4	Наличие общего воздействия уровня образования $\delta_1 = \delta_2 = \gamma_{11} = \gamma_{31} = \gamma_{32} = 0$	2,991**
5	Наличие главного воздействия уровня образования $\delta_1 = \delta_2 = 0$	3,684**
6	Наличие эффекта взаимодействия $\gamma_{11} = \gamma_{31} = \gamma_{32} = 0$	2,264
7	Наличие структурного изменения при $u = 45$ и $v < 8$	2,374*
8	Наличие структурного изменения при $u = 45$ и $v > 8$	0,8128
9	Наличие структурного изменения при $v = 8$ и $u > 45$	1,129

Седьмая проверка значимости в этой таблице, показывает, что поверхность над прямоугольником $R(3, 1)$ существенно отличается от поверхности над прямоугольником $R(2, 1)$. Это означает, что в группе с менее чем восьмилетним образованием на возрастной линии $u = 45$ происходит структурное изменение. В то же время восьмая проверка показывает, что это не верно для тех, кто имеет более чем восьмилетний уровень образования (при этом сравниваются поверхности над $R(3, 2)$ и $R(2, 2)$). Девятая проверка указывает на отсутствие существенного изменения на линии, соответствующей восьми годам обучения, для возрастной группы старше сорока пяти лет.

Таким образом, при внимательном рассмотрении можно убедиться в том, что для различных образовательно-возрастных групп выводы различны. Результаты проверок 1—6 (табл. 7) показали, что возраст и уровень образования являются значимыми переменными (в особенности с точки зрения их «главных воздействий»). Вместе с тем важно провести дополнительные проверки для того, чтобы разобраться, чем именно эти воздействия отличаются друг от друга для различных групп. Тем самым можно гораздо подробнее проанализировать многие вопросы, касающиеся тех или иных конкретных групп.

4.5. ОБСУЖДЕНИЕ

В заключение стоит, по-видимому, выделить некоторые моменты такого подхода. Во-первых, билинейный сплайн определяет непрерывную поверхность (в отличие от тех функций, при построении которых неограниченно используются искусственные переменные). Достоинства непрерывных моделей уже отмечались в главе 1. Здесь же мы подчеркнем лишь одно, а именно тот факт, что требование непрерывности сокращает число степеней свободы. Например, в рассмотренном в разделе 4.2 общем случае оцениванию подлежали $(I + 1)(J + 1)$ параметров. Если бы над каждым из IJ прямоугольников разрешалось строить свою билинейную поверхность без общего условия непрерывности, то потребовалось бы оценить $4IJ$ параметров.

Во-вторых (с точки зрения количества степеней свободы), применение сплайнов более высокого порядка, скажем биквадратичных или бикубических, становится все более дорогостоящим делом. Кроме того, трудно дать разумную экономическую интерпретацию коэффициентам при членах второго и третьего порядка, в особенности коэффициентам при смешанных произведениях. К тому же резко возрастает число возможных типов структурных изменений, в то время как наши возможности придать им разумный смысл уменьшаются. Поэтому в двумерном случае вряд ли стоит использовать сплайны более высокого порядка³. Тем не менее их иногда можно применять в некоторых простых случаях, например устраивая взаимодействие линейной функции с кубическим сплайном (см. [171]).

В-третьих, даже если выборка велика, есть надежда обнаружить лишь ограниченное число эффектов. Так, именно в связи с этим в модели, рассмотренной в разделе 4.4, мы «не разрешали» коэффициенту взаимодействия изменяться в возрастных группах моложе сорока пяти лет. Такой разумный выбор вида билинейного сплайна весьма способствует выявлению существенных изменений в величинах воздействия тех или иных параметров, поскольку при таком подходе уменьшается число оцениваемых параметров и становится меньше проблем, связанных с мультиколлинеарностью. Независимо от величины выборки представление пространства возраст—образование двадцатью переменными, вероятнее всего, окажется лишь растратой сил.

³ См., например, работы де Боора [41], занимавшегося анализом бикубических сплайнов, и Фуллера [64], который рассматривал «привитые друг к другу» полиномы.

5.1. ВВЕДЕНИЕ

Со времени выхода работы Кобба и Дугласа [33] (1928 г.) производственная функция Кобба—Дугласа и (в несколько меньшей степени) функция полезности Кобба—Дугласа стали очень популярным средством анализа экономических вопросов. Такая популярность объясняется как простотой вида этих функций, так и широкими возможностями их использования в самых разных ситуациях. Однако их применение предполагает принятие довольно суровых ограничений. Например, у производственной функции должна быть постоянной отдача от масштаба, откуда следует, что кривые средних издержек не могут иметь U-образную форму. Кроме того, приходится соглашаться с требованиями гомотетичности и единичной эластичности замены.

В этой главе на основе общей методики построения сплайн-функций развивается понятие непрерывной и кусочной функции Кобба—Дугласа. В классе таких функций допустимы U-образные кривые средних издержек и «кусочная гомотетичность»*. Это достигается ценой отказа от требования дифференцируемости на прямых, параллельных осям входных параметров. Однако требование единичной эластичности замены сохраняется.

Эта глава построена следующим образом. В разделе 5.2 дается определение сплайна Кобба—Дугласа. Ради простоты рассматривается двухфакторная производственная функция (как и в обычном случае, это — труд и капитал). В разделе 5.3 описаны свойства сплайновых производственных функций Кобба—Дугласа, а в разделе 5.4 — свойства сплайновой функции полезности Кобба—Дугласа. Наконец, раздел 5.5 содержит пример практического применения такого обобщения производственной функции Кобба—Дугласа.

* Гомотетичной называется производственная функция, изокванты которой подобны, т. е. могут быть получены одна из другой с помощью преобразования гомотетии (homothetic isoquant production function). Класс таких функций был введен в 1968 г. (Clemhout S. The Class of Homothetic Isoquant Production Functions. Review of Economic Studies, 1968, vol. 35, 91—104). Общий вид функций этого класса может быть записан как $Q = F(f(K, L)) = F(z)$, где F — функция, монотонная по $f(K, L)$, а z — функция первой степени однородности по K и L . Этот класс функций дает вероятность моделировать изменение отдачи от масштаба, равно как и эластичности замены с изменением уровня выпуска. Гомотетичная производственная функция (ПФ), моделирующая убывание отдачи от масштаба с роста уровня выпуска, предложена в 1966 г. А. Зельнером и Н. Реванкаром (Zellner A., Revankar N. S. Generalized Production Functions. Review of Economic Studies, 1969, 36, 241—250). См. также: Зельнер А. Байесовские методы в эконометрии. М., Статистика, 1980, параграф 6.3. — Примеч. ред.

5.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПЛАЙНА КОББА — ДУГЛАСА

Пусть на осях L и K откладываются значения труда и капитала соответственно. Выберем две сетки:

$$\Delta_L = \{\bar{L}_1 < \bar{L}_2 < \dots < \bar{L}_{I-1}\} \text{ и } \Delta_K = \{\bar{K}_1 < \bar{K}_2 < \dots < \bar{K}_{J-1}\},$$

точки которых будут называться *узлами*. В первой четверти координатной плоскости они определяют прямоугольную решетку, которая

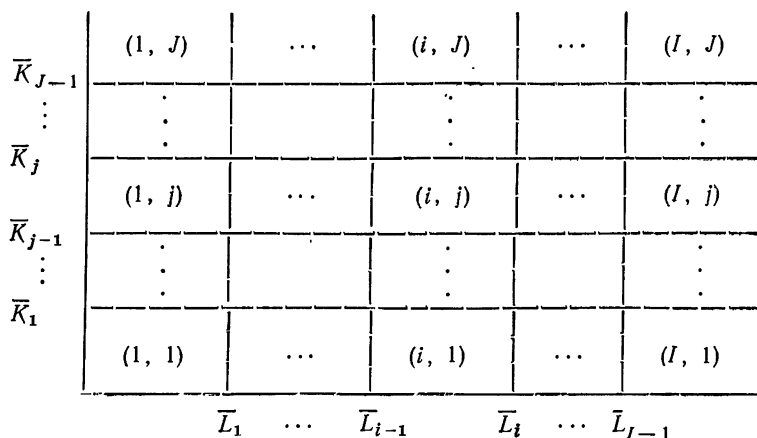


Рис. 5.1. Решетка на плоскости L, K

состоит из IJ прямоугольников (рис. 5.1). *Сплайн Кобба—Дугласа* есть функция $Q(L, K)$, которую можно представить в виде

$$Q(L, K) = \theta_{ij} L^{\alpha_i} K^{\delta_j}, \quad (1)$$

где L и K принадлежат прямоугольнику (i, j) , величины θ_{ij} , α_i и δ_j — положительные константы, причем величины θ_{ij} выбираются так, чтобы функция $Q(L, K)$ была непрерывной в первой четверти. При заданных величинах θ_{11} , α_i и δ_j из этого требования вытекают следующие условия непрерывности:

$$\ln \theta_{(i+1)j} = \ln \theta_{ij} + (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \ln \bar{L}_i, \quad i = 1, 2, \dots, I-1, \quad (2)$$

при всех j и

$$\ln \theta_{i(j+1)} = \ln \theta_{ij} + (\delta_j - \delta_{j+1}) \ln \bar{K}_j, \quad j = 1, 2, \dots, J-1, \quad (3)$$

для любого i . Таким образом, эластичность выпуска относительно труда (величина α_i) и эластичность выпуска относительно капитала (величина δ_j) являются ступенчатыми функциями на сетках Δ_L и Δ_K соответственно.

Часто удобнее работать со сплайном Кобба—Дугласа, записанным в логарифмическом виде:

$$\ln Q = \ln \theta_{ij} + \alpha_i \ln L + \delta_j \ln K, \quad (4)$$

при всех L и K , принадлежащих прямоугольнику (i, j) . В выражении (4) $\ln Q$ представлен в виде суммы двух *линейных сплайнов*. В одном из них независимой переменной является $\ln L$, а в другом — $\ln K$. В терминах главы 4 выражение (4) можно считать билинейным сплайном без взаимодействия. С геометрической точки зрения оно определяет кусочно-плоскую, или, как еще говорят, «крышеобразную», поверхность.

Формулу (4) можно преобразовать таким образом, что условия непрерывности (2) и (3) будут в ней учтены уже автоматически. А именно определим новые переменные:

$$L_{i+1} = \max [(\ln L - \ln \bar{L}_i), 0], \quad i = 1, 2, \dots, I - 1;$$

$$K_{j+1} = \max [(\ln K - \ln \bar{K}_j), 0], \quad j = 1, 2, \dots, J - 1.$$

Тогда при всех L и K

$$\ln Q = \ln \theta_{11} + \alpha_1 \ln L + \delta_1 \ln K + \sum_{i=2}^I \tilde{\alpha}_i L_i + \sum_{j=2}^J \tilde{\delta}_j K_j, \quad (5)$$

где параметры $\tilde{\alpha}_i$ ($i = 2, 3, \dots, I$) и $\tilde{\delta}_j$ ($j = 2, 3, \dots, J$) представляют собой *сдвиги* эластичностей труда и капитала соответственно. Представление (5) полезно в тех задачах оценивания, в которых эти сдвиги особенно интересны.

Во всех последующих разделах выражение (1) будет называться *сплайновой производственной функцией Кобба—Дугласа* всюду, где оно будет использоваться в смысле теории производственных функций. Если же оно применяется в рамках теории полезности, то мы будем его называть *сплайновой функцией полезности Кобба—Дугласа*.

5.3. СПЛАЙНОВАЯ ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ КОББА — ДУГЛАСА

В анализе свойств производственной функции Кобба—Дугласа исключительно важную роль играют линии уровня. При фиксированном значении уровня выпуска Q_0 линия уровня над прямоугольником (i, j) задается соотношением

$$K = \left[\frac{Q_0 L^{-\alpha_i}}{\theta_{ij}} \right]^{1/\delta_j}. \quad (6)$$

Эти линии непрерывны на плоскости (L, K) , но на прямых решетки могут иметь «углы». Первое из этих утверждений следует из непрерывности обычной производственной функции Кобба—Дугласа, а второе вытекает из того обстоятельства, что наша производственная функция не обязана быть дифференцируемой на линиях решетки. Линии уровня строго выпуклы тогда и только тогда, когда

$$\alpha_i \geq \alpha_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, I - 1$$

и

$$\delta_j \geq \delta_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, J - 1.$$

Другими словами, линии уровня строго выпуклы тогда и только тогда, когда каждая эластичность выпуска есть невозрастающая функция соответствующего входного параметра.

В терминах отдачи от масштаба ($\alpha_i + \delta_j$) в прямоугольнике (i, j) из условий выпуклости вытекает, что

$$\alpha_i + \delta_j \leq \alpha_m + \delta_n; m = 1, 2, \dots, i; n = 1, 2, \dots, j$$

и

$$\alpha_i + \delta_j \geq \alpha_m + \delta_n; m = i, i + 1, \dots, J; n = j, j + 1, \dots, J.$$

Как показано на рис. 5.2, это означает, что отдача от масштаба для производственной функции $Q(L, K)$ во всех прямоугольниках, которые лежат ниже и левее прямоугольника (i, j) , будет не меньше, чем в прямоугольнике (i, j) , а

во всех прямоугольниках, которые лежат выше и правее (i, j) , отдача от масштаба будет не больше, чем в прямоугольнике (i, j) . Однако при сравнении отдачи от масштаба в прямоугольнике (i, j) с отдачей от масштаба в прямоугольниках, расположенных выше и левее (i, j) и ниже и правее (i, j) , столь определенных выводов сделать нельзя.

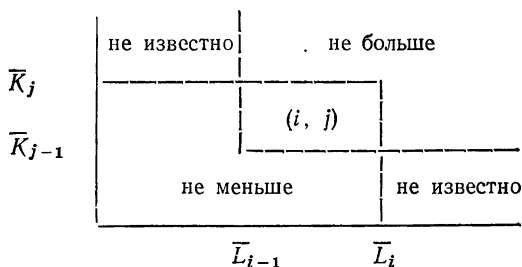


Рис. 5.2. Величина отдачи от масштаба по сравнению с прямоугольником (i, j)

Хорошо известно, что линиям уровня обычной функции Кобба—Дугласа в силу ее гомотетичности соответствуют прямолинейные траектории роста. Траектория роста сплайновой производственной функции Кобба—Дугласа над каждым отдельным прямоугольником тоже представляет собой отрезок прямой линии. Однако на линиях решетки эти траектории ведут себя весьма специфическим образом.

Чтобы убедиться в этом, предположим, что выполняются условия выпуклости, и рассмотрим величину углового коэффициента линии уровня (6) внутри прямоугольника (i, j) (но не на его границе):

$$\frac{dK}{dL} = - \frac{\alpha_i}{\delta_j} \frac{K}{L}.$$

На линиях решетки нельзя дать хорошего определения предельной норме технической замены $|dK/dL|$, поскольку здесь обе эластичности выпуска претерпевают скачкообразные изменения, вследствие чего нельзя дать хорошего однозначного определения понятию предельного продукта. Рассмотрим прямоугольники (i, j) и $(i + 1, j)$ и вычислим односторонние производные функции, графиком которой являет-

ся линия уровня, при $\dot{L} = \ddot{\bar{L}}_i$:

$$\frac{dK}{dL^+} = \lim_{L \rightarrow \bar{L}_i^+} \frac{dK}{dL} = - \frac{\alpha_{i+1}}{\delta_j} \frac{K}{\bar{L}_i};$$

$$\frac{dK}{dL^-} = \lim_{L \rightarrow \bar{L}_i^-} \frac{dK}{dL} = - \frac{\alpha_i}{\delta_j} \frac{K}{\bar{L}_i}.$$

Обозначим через w цену труда, а через r — цену капитала. Тогда при всех отношениях цен w/r , таких, что

$$\left| \frac{dK}{dL^+} \right| < \frac{w}{r} < \left| \frac{dK}{dL^-} \right|, \quad (7)$$

условия первого порядка максимизации выпуска продукции фирмы и условия минимизации издержек не выполняются, т. е. предельная норма технической замены не равна отношению цен. Следовательно, взаимно компенсированные изменения цен в пределах (7) не меняют величины оптимальной комбинации затрат факторов, соответствующей фиксированному уровню выпуска.

Зафиксируем w/r и будем увеличивать величину выпуска (расширять производство). Пусть при этом траектория роста находится в прямоугольнике (i, j) и при расширении производства выходит в некоторую точку линии решетки $L = \bar{L}_i$, соответствующую уровню затрат капитала K^* . Это K^* удовлетворяет соотношению

$$\left| \frac{dK}{dL^-} \right| = \frac{\alpha_i}{\delta_j} \frac{K^*}{\bar{L}_i} = \frac{w}{r}$$

или, выражая отсюда K^* ,

$$K^* = \frac{\delta_j \bar{L}_i}{\alpha_i} \left(\frac{w}{r} \right). \quad (8)$$

Так как эластичность выпуска относительно затрат труда над прямоугольником $(i+1, j)$ меньше, чем над прямоугольником (i, j) , расширение объема производства Q за пределы величины $Q(\bar{L}_i, K^*)$ выгодно проводить только за счет увеличения капитала. Так можно поступать до тех пор, пока правая предельная норма технической замены не сравняется с исходным отношением цен либо пока не упадет значение эластичности выпуска относительно капитала, что произойдет, если траектория пересечет линию решетки $K = \bar{K}_j$. В первом варианте, т. е. если существует $K^{**} < \bar{K}_j$, такое, что

$$\left| \frac{dK}{dL^+} \right| = \frac{\alpha_{i+1}}{\delta_j} \frac{K^{**}}{\bar{L}_i} = \frac{w}{r},$$

или, решая относительно K^{**} ,

$$K^{**} = \frac{\delta_i \bar{L}_i}{\alpha_{i+1}} \frac{w}{r},$$

траектория роста в прямоугольнике $(i + 1, j)$ для значений выпуска $Q(L, K) > Q(\bar{L}_i, K^{**})$ будет прямой линией с коэффициентом наклона $(\delta_j \omega / \alpha_{i+1} r)$, который больше углового коэффициента $(\delta_j \omega / \alpha_i r)$ траектории роста в прямоугольнике (i, j) . Эта ситуация изображена на рис. 5.3 (а) в простейшем случае $I = J = 2, i = j = 1$.

Во втором варианте, т. е. если траектория успеет достичь линии решетки $K = \bar{K}_j$ прежде, чем правая предельная норма замены срав-

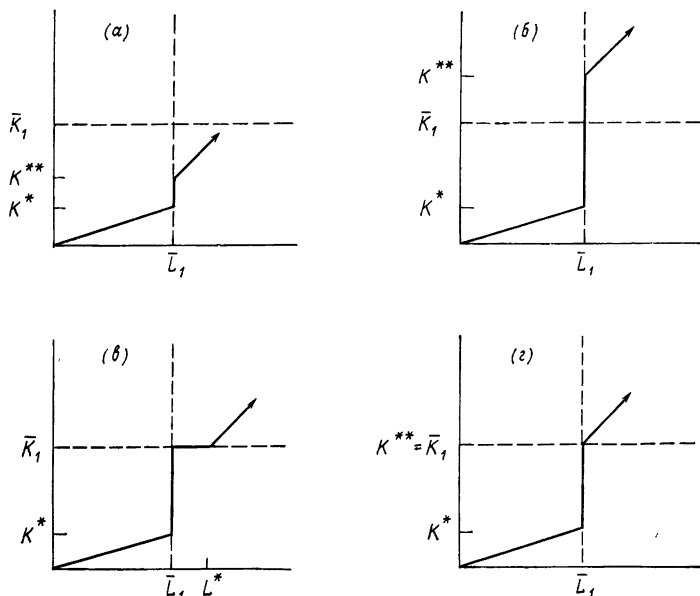


Рис. 5.3. Траектория роста

няется с исходным отношением цен, снова возможны два случая. Во-первых, траектория может продолжать свой путь вдоль $L = \bar{L}_i$. Это произойдет тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\substack{L \rightarrow \bar{L}_i^+ \\ K \rightarrow \bar{K}_j^+}} \left| \frac{dK}{dL} \right| = \frac{\alpha_{i+1}}{\delta_{j+1}} \frac{\bar{K}_j}{\bar{L}_i} < \frac{\omega}{r} < \lim_{\substack{L \rightarrow \bar{L}_i^+ \\ K \rightarrow \bar{K}_j^+}} \left| \frac{dK}{dL} \right| = \frac{\alpha_i}{\delta_{j+1}} \frac{\bar{K}_j}{\bar{L}_i}. \quad (9)$$

Во-вторых, траектория может повернуть на 90° и пойти вдоль прямой $K = \bar{K}_j$. Это случится в том и только в том случае, если

$$\lim_{\substack{L \rightarrow \bar{L}_i^+ \\ K \rightarrow \bar{K}_j^-}} \left| \frac{dK}{dL} \right| = \frac{\alpha_{i+1}}{\delta_j} \frac{\bar{K}_j}{\bar{L}_i} < \frac{\omega}{r} < \lim_{\substack{L \rightarrow \bar{L}_i^+ \\ K \rightarrow \bar{K}_j^+}} \left| \frac{dK}{dL} \right| = \frac{\alpha_{i+1}}{\delta_{j+1}} \frac{\bar{K}_j}{\bar{L}_i}. \quad (10)$$

Если выполняется неравенство (9), то траектория роста будет идти вдоль прямой $L = \bar{L}_i$ либо до тех пор, пока в некоторой точке

$K^{***} < \bar{K}_{j+1}$ правая предельная норма технической замены не станет равной исходному отношению цен, либо до пересечения со следующей горизонтальной линией решетки $K = \bar{K}_{j+1}$, после чего описанная процедура повторяется. Первая из этих двух возможностей показана на рис. 5.3(б).

Если выполнено неравенство (10), то траектория роста будет идти вдоль прямой $K = \bar{K}_j$ либо до тех пор, пока в некоторой точке $L^* < \bar{L}_{i+1}$ правая предельная норма технической замены не станет равной исходному отношению цен, либо до пересечения со следующей вертикальной линией решетки $L = \bar{L}_{i+1}$, после чего описанная процедура повторяется. Первый из этих двух вариантов показан на рис. 5.3(в).

Если же сначала будет достигнута линия решетки $L = \bar{L}_{i+1}$, то аналогично вариантам, возникающим в точке (\bar{L}_i, \bar{K}_j) , траектория роста при $Q(L, K) > Q(\bar{L}_{i+1}, \bar{K}_j)$ может повернуть на вертикальную прямую $L = \bar{L}_{i+1}$ или же продолжать свой путь вдоль прямой $K = \bar{K}_j$.

Остается еще одна возможность, а именно когда соотношения (9) и (10) не справедливы, а имеет место равенство

$$\frac{\omega}{r} = \frac{\alpha_{i+1}}{\delta_{i+1}} \frac{\bar{K}_j}{\bar{L}_i}. \quad (11)$$

Если выполняется равенство (11), то (как это показано на рис. 5.3(г)) в прямоугольнике (i, j) траектория роста будет лучом, угловой коэффициент которого равен $(\delta_{j+1}\omega/\alpha_{i+1}r)$ и который выходит из точки (\bar{L}_i, \bar{K}_j) .

Функция издержек, соответствующая сплайновой производственной функции Кобба—Дугласа, будет непрерывной кусочной функцией, составленной из обычных функций издержек Кобба—Дугласа. Для значений выпуска Q , соответствующих точкам, лежащим внутри прямоугольника (i, j) , сплайновая функция издержек Кобба—Дугласа имеет вид

$$C = r \left(\frac{\alpha_i + \delta_j}{\delta_j} \right) \left[\left(\frac{\delta_j \omega}{\alpha_i r} \right)^{\alpha_i} \frac{Q}{\theta_{ij}} \right]^{1/(\alpha_i + \delta_j)}. \quad (12)$$

Если значение выпуска Q приходится на линию решетки $L = \bar{L}_i$, то функция издержек будет следующей:

$$C = \omega \bar{L}_i + r \left[\frac{Q}{\theta_{ij} \bar{L}_i^{\alpha_i}} \right]^{1/\delta_j}. \quad (13)$$

Если же значение выпуска Q попадает на линию решетки $K = \bar{K}_j$, то функция издержек будет иметь вид

$$C = \omega \left[\frac{Q}{\theta_{ij} \bar{K}_j^{\delta_j}} \right]^{1/\alpha_i} + r \bar{K}_j. \quad (14)$$

Если Q стремится к $Q(\bar{L}_i, K^*)$, то выражение (12) стремится к значению (13). Аналогично при $Q \rightarrow Q(L^*, \bar{K}_j)$ выражение (12) стремится к значению (14). Отсюда следует, что функция издержек непрерывна.

Соответствующую формулам (12)—(14) функцию средних издержек можно получить, разделив каждую из них на Q ($Q \neq 0$). В случае (12) функция средних издержек будет возрастающей, постоянной или убывающей в зависимости от того, лежит ли данное значение Q в прямоугольнике с убывающей, постоянной или возрастающей отдачей от масштаба. Поскольку функция издержек непрерывна, то же можно сказать и о функции средних издержек.

Соответствующая формулам (12)—(14) предельная функция издержек получается дифференцированием каждого из этих уравнений по Q . В тех точках траектории роста, где имеются изломы, предельные издержки не определены, так как левые и правые производные, вообще говоря, не равны друг другу. Разумеется, в случае (12) интервал предельных издержек имеет обычный для производственной функции Кобба—Дугласа вид.

5.4. СПЛАЙНОВАЯ ФУНКЦИЯ ПОЛЕЗНОСТИ КОББА — ДУГЛАСА

Нет ничего удивительного в том, что сплайны Кобба—Дугласа нашли интересное применение и в теории полезности, а не только в теории производственной функции. Рассмотрим, например, сплайновую функцию полезности Кобба—Дугласа

$$U(Y, L) = \begin{cases} \theta_1 Y^{\alpha_1} L^\delta, & \text{если } Y \leq \bar{Y}; \\ \theta_2 Y^{\alpha_2} L^\delta, & \text{если } Y > \bar{Y}, \end{cases}$$

где Y — недельная величина заработной платы индивидуума; L — величина его свободного времени, причем $\bar{Y} = 80$ дол. в неделю есть уровень дохода, при котором эластичность полезности относительно Y , возможно, падает (тем самым $\alpha_1 \geq \alpha_2$). Пусть, кроме того, $\ln \theta_2 = \ln \theta_1 + (\alpha_1 - \alpha_2) \bar{Y}$.

На рис. 5.4 мы изобразили (следуя примеру Риса [143, с. 158—160]) различные возможные комбинации распределения времени между работой и досугом. При этом речь идет о работающем мужчине, ставка заработной платы которого составляет 2 дол. в час и который может свободно варьировать количество отработываемых часов¹. Исходной ситуации, в которой он находится, отвечает положение равновесия в точке C , соответствующей 40-часовой рабочей неделе и критическому уровню дохода $\bar{Y} = 80$ дол. в неделю. Эта точка лежит на линии уровня I_0 (называемой также кривой безразличия). Предположим теперь, что рабочему предлагается план введения негативного подоходного налога. В соответствии с ним, если рабочий вообще не имеет трудового заработка, ему будет гарантирована выплата

¹ В задачах такого типа функция Кобба—Дугласа использовалась и раньше. Подробно это изложено в работе [96].

60 дол. в неделю, а каждая заработанная сумма будет облагаться 50%-ным «налогом» ($t = 0,5$) путем соответствующего уменьшения с ростом дохода размера гарантированной выплаты. По этому плану слева от точки В, которая находится выше \bar{Y} и отвечает величине заработка 120 дол. в неделю ($= 60 \text{ дол.} \cdot t$), он перестает получать какие бы то ни было гарантированные выплаты вообще. Введение тако-

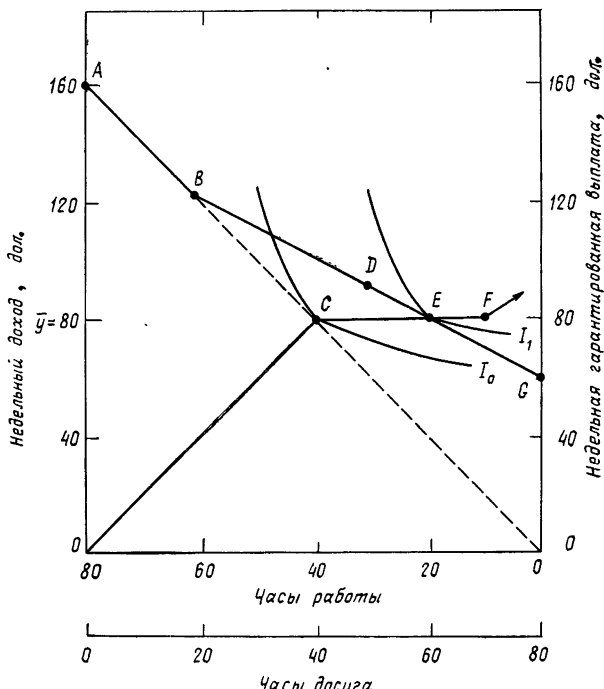


Рис. 5.4. Эффект негативного подоходного налога

го негативного налога расширит его возможности, поскольку график зависимости величины общего дохода от отработанного времени изменится (им станет вместо прямой АО ломаная АВГ). В случае обычной функции полезности (когда, в частности, $\alpha_1 = \alpha_2$) точка равновесия перейдет в положение D, соответствующее как более высокому уровню дохода, так и увеличению досуга.

Предположим теперь, что $\alpha_2 < \alpha_1$. Такая ситуация вполне реальна, например, для студента, которому нужно заработать 80 дол. в неделю, но для которого главное — иметь как можно больше свободного времени для учебы. Пусть его исходное положение соответствует точке излома С, в которой

$$\frac{\delta}{\alpha_1} \left(\frac{80}{L} \right) = \lim_{Y \rightarrow 80^-} \left(- \frac{dY}{dL} \right) < \omega < \lim_{Y \rightarrow 80^+} \left(- \frac{dY}{dL} \right) = \frac{\delta}{\alpha_2} \left(\frac{80}{L} \right),$$

где $w = 2,00$ дол. в час есть его реальная заработная плата в обычных условиях. По плану введения негативного подоходного налога его реальная заработная плата уменьшится до $w(1-t) = 1,00$ дол. в час. Как было показано в разделе 5.3, соответствующая «траектория роста» будет идти вдоль горизонтальной прямой $\bar{Y} = 80$ дол., пока она не достигнет такой точки F на некоторой кривой безразличия, в которой односторонняя производная $|dY/dL^+|$ станет равной новому значению его реальной заработной платы, т. е.

$$L^* = \frac{\bar{Y}}{w(1-t)} \left(\frac{\delta}{\alpha_2} \right) = 80 \left(\frac{\delta}{\alpha_2} \right).$$

После этого траектория роста пойдет по прямой с угловым коэффициентом $(\alpha_2 w / \delta)$. Если, однако, прежде чем достичь точки F, траектория пересечет ABG, то нам придется остановиться в точке E, лежащей на кривой безразличия I_1 . При этом общий уровень дохода не меняется, а весь эффект введения негативного подоходного налога сводится к увеличению свободного времени (что равносильно уменьшению предложения на рынке рабочей силы).

На интуитивном уровне это означает следующее. Вследствие введения налога происходит уменьшение реальной заработной платы, которое говорит о том, что цена свободного времени падает. В свою очередь, «потребление» свободного времени возрастает. Однако при $Y \rightarrow (\bar{Y})^+$ предельная норма замены ($-dY/dL$) больше предельной нормы замены при $Y \rightarrow (\bar{Y})^-$. Поэтому до тех пор, пока предельная норма замены не станет равной отношению цен дохода и досуга (реальная заработная плата), т. е. пока индивидууму, с его точки зрения, это не станет «выгодно», он не будет увеличивать свое «потребление» трудового дохода. В этом примере стимулирующий эффект введения негативного подоходного налога вновь появится лишь тогда, когда траектория выйдет в точку F. При этом величина «потребленного» свободного времени критическим образом зависит от разности коэффициентов эластичности $\alpha_1 - \alpha_2$ и от нормы налогообложения (при условии, что мы находимся ниже точки B).

5.5. ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧЕ О ПРОИЗВОДСТВЕ ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ

По предложению одного из рецензентов этой книги было проведено оценивание сплайновой производственной функции Кобба—Дугласа, основанное на работе Нерлова [121] по парогенераторной энергетике². Отличительной чертой работы Нерлова является содержащийся в ней вывод о том, что отдача от масштаба есть, по всей видимо-

² Учитывая предупреждения самого Нерлова [121], касающиеся точности его данных, а также недавнюю работу Грина [78], в которой ставится под сомнение гомотетичность соответствующей производственной функции, представленные здесь результаты следует рассматривать главным образом как иллюстративный пример.

сти, убывающая функция выпуска. В рамках теории сплайновой производственной функции Кобба—Дугласа такое наблюдение можно интерпретировать иначе, а именно: отдача от масштаба есть убывающая функция уровня затрат.

В свете последних событий в мире, и в частности в свете «энергетического кризиса», вопрос о том, изменяется ли отдача от масштаба в производстве электроэнергии, становится еще более важным. Если окажется, что в отрасли, которой принадлежат соответствующие коммунальные предприятия, при тех или иных уровнях производства наблюдается рост отдачи от масштаба, это серьезным образом отразится на инвестиционной политике и государственном субсидировании этой отрасли. При исследовании этого вопроса Нерлов предположил, что коммунальные предприятия считают цены выпуска и затраты экзогенными и минимизируют свои общие издержки при условии ограничения, согласно которому производство описывается функцией Кобба—Дугласа. Данные, использованные при оценивании этой модели, касались 145 фирм в 1955 г., а их можно найти в работе [121], где также имеются ссылки на соответствующие источники.

Опуская соответствующие отдельным фирмам индексы, предположим, что производственная функция имеет вид

$$Q = \theta_i L^\alpha K^\eta F^{\delta_i} \varepsilon, \quad (15)$$

где Q — выход продукции (измеряемый в миллиардах киловатт-часов), L — затраты труда, K — затраты капитала, F — затраты топлива (главным образом угля), ε — остаточный член, выражающий естественные различия в уровне экономической эффективности отдельных фирм, а θ_i , α , η и δ_i — обычные параметры производственной функции Кобба—Дугласа. В отличие от Нерлова мы здесь будем предполагать, что эластичность выпуска относительно затрат топлива равна δ_1 при $F \leq \bar{F}_1$ и δ_2 при $F > \bar{F}_1$. Надо признать, что положение узла ($\bar{F}_1 = 61718,4$ млн. британских тепловых единиц) было выбрано несколько произвольным образом. Следует надеяться, что при более тщательном анализе положение узла \bar{F}_1 , а также возможных узлов на оси затрат труда и на оси затрат капитала удастся определить на основе соответствующих данному производству технологических соображений. Но наш выбор не более произволен, чем использованное Нерловым разбиение на пять групп, и приблизительно соответствует 33-му процентилю по уровню затрат топлива фирмами.

Следуя Нерлову [121, с. 171—175], можно показать, что для производственной функции (15) при экзогенных значениях цен затрат и выпуска функция издержек, которую необходимо минимизировать, имеет вид

$$\begin{aligned} \ln C - P_F = & \lambda_i + \frac{1}{w_i} \ln Q + \frac{\alpha}{w_i} (\ln P_L - \ln P_F) + \\ & + \frac{\eta}{w_i} (\ln P_K - \ln P_F) - \frac{1}{w_i} \ln \varepsilon, \end{aligned} \quad (16)$$

где $w_i = \alpha + \eta + \delta_i$ есть отдача от масштаба, \bar{C} — общие издержки, P_L — цена труда, P_K — цена капитала, P_F — цена топлива, а

$$\lambda_i = \ln w_i - \frac{1}{w_i} [\ln \theta_i + \alpha \ln \alpha + \eta \ln \eta + \delta_i \ln \delta_i].$$

Действуя далее так же, как Нерлов в модели В, где предполагается, что значение P_K одинаково для всех фирм, из (16) можно получить, что

$$w_i \ln C = \beta_i + \ln Q + \alpha \ln P_L + \eta \ln P_F - \ln \varepsilon, \quad (17)$$

где $\beta_i = w_i \lambda_i + \eta \ln P_K$. Заметим, что мы умножили (16) на w_i для того, чтобы возмущающий член был гомоскедастическим при изменении отдачи от масштаба (т. е. $\delta_1 \neq \delta_2$).

Если остаточные члены в (17) являются независимыми, гомоскедастическими и нормально распределенными, то соответствующую (17) функцию правдоподобия можно максимизировать при выполнении условия непрерывности $\ln \theta_2 = \ln \theta_1 + (\delta_1 - \delta_2) \ln \bar{F}_1$. Полученные методом наибольшего правдоподобия оценки $\hat{\alpha}$, $\hat{\delta}_1$, $\hat{\delta}_2$, $\hat{\eta}$ и $\hat{\theta}_1$ будут асимптотически состоятельными, нормально распределенными и эффективными. Поскольку функция правдоподобия нелинейна по этим параметрам, для получения максимума необходимо использовать методику, подобную методу скорейшего спуска Марквардта [116].

Полученные методом наибольшего правдоподобия оценки (вместе с их средними квадратичными ошибками) приведены в табл. 8. Эти оценки сходны с результатами Нерлова: эластичности выпуска относительно труда и топлива имеют высокую значимость, а эластичность относительно капитала имеет низкую значимость (как это часто и получалось в работе Нерлова). Особенно важна полученная оценка разности ($\hat{\delta}_1 - \hat{\delta}_2 = 0,03140$) коэффициентов эластичности относительно топлива в узле \bar{F}_1 . При проверке значимости этого сдвига соответствующая тесту на асимптотическую нормальность статистика дает величину

$$\frac{(\hat{\delta}_1 - \hat{\delta}_2)}{[\text{var}(\hat{\delta}_1) + \text{var}(\hat{\delta}_2) - 2 \text{cov}(\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2)]^{1/2}} = 3,112,$$

т. е. значимость получается весьма высокой. Таким образом, хотя отдача от масштаба и растет всюду, в точке \bar{F}_1 она, по-видимому, испытывает существенный спад.

Таблица 8

Полученные для примера Нерлова
оценки коэффициентов

Коэффициент	Оценка	Средняя квадратичная ошибка
α	0,5842*	0,2533
δ_1	0,5905**	0,1240
δ_2	0,5591**	0,1244
η	0,01574	0,2394
θ_1	1823	2498

Мы, по-видимому, слишком многого хотим от наших данных. Мы хотим проверять с их помощью наши теории, получать оценки важнейших параметров и к тому же выяснять точный вид зависимости между различными переменными. Продвижение в этой области будет, по всей вероятности, очень медленным до тех пор, пока мы не научимся на гораздо более прочной теоретической основе накладывать на наши эмпирические данные некоторую структуру запаздываний во времени.

Цви Грилихес [80, с. 17—18]

6.1. ВВЕДЕНИЕ

Литература о распределенном запаздывании (о распределенном лаге), мягко говоря, обширна. Поток работ на эту тему продолжается, после публикации обзорной статьи Грилихеса [80] появились еще три обзорные работы по этому вопросу — Драймза [44], Нерлова [122] и Симса [153]. Уже и без того обширная «классическая» литература на эту тему недавно пополнилась многочисленными работами, в которых используется байесовский подход (см., например, [30], [106], [151]). Этот наплыв байесовских идей был плодотворным по крайней мере с одной точки зрения: он еще раз со всей силой поставил вопрос: почему обычные процедуры оценивания методом наименьших квадратов без ограничений зачастую «работают» столь неудовлетворительно? Оказывается, что подлинным виновником является вовсе не плохое качество данных, а недостаточная априорная информация. Помещенная в начале этой главы цитата из статьи Грилихеса [80], а также работы Лимера [106], Нерлова [122] и Симса [153] должны способствовать осознанию этого факта всеми специалистами.

Конечно, в развитии динамической экономической теории, так же как и в попытках применить ее к моделям с распределенным запаздыванием, мы добились некоторого продвижения. Однако, говоря словами Симса [153], роль этой теории заключается «в значительной степени вовсе не в том, что она дает нам решения, а скорее в том, что она помогает нам лучше понять границы нашего невежества». Каким же образом априорная информация учитывается при построении моделей с распределенным запаздыванием? На практике исследователь-прикладник обычно делает это своим, довольно произвольным способом. Мало кто пытался вывести структуру запаздываний из каких бы то ни было оптимизационных соображений; любая имеющаяся в наличии априорная информация, как правило, используется для целей параметризации запаздывания весьма свободно¹.

¹ Классическим контр-примером является построение модели частичной адаптации на основе гипотезы минимизации издержек (см. раздел 9.7).

К любой параметризации запаздывания можно подходить с двух различных методологических позиций. Во-первых, можно считать, что некоторые неслучайные ограничения на описывающие запаздывание параметры должны выполняться буквально. (Например, можно потребовать, чтобы коэффициенты при запаздывающих членах обязательно лежали на кубической параболе). Если такие ограничения окажутся на самом деле не соответствующими действительности, то в результате оценивания мы вполне можем получить смещенные и несостоятельные оценки. К такого рода требованиям (чтобы веса запаздываний точно укладывались на график функции определенного типа, не отклоняясь при этом ни на малейшую величину, скажем на 10^{-6}) следует относиться во многом так же, как и ко всем стандартным классическим линейным регрессионным моделям. В том и другом случае мы имеем дело лишь с теоретической конструкцией, которая подходит для тех или иных конкретных целей. Эта конструкция «схватывает» лишь самое общее впечатление от модели, но она, выражаясь фигурально, служит тем местом, куда можно, наконец, «повесить шляпу» и приступить к анализу. Разумеется, прежде чем вводить такие жесткие ограничения, необходимо тщательно изучить всю имеющуюся априорную информацию с тем, чтобы выбранный способ параметризации не оказался несовместимым с каким-нибудь теоретически возможным видом запаздывания.

Второй подход состоит в том, что ограничения на вид параметризации считаются не абсолютными истинами, а лишь разумным приближением к действительной, но неизвестной структуре запаздываний. Если эти ограничения на самом деле выполняются лишь в некотором приближении, но сформулированы в неслучайных терминах, то полученные оценки коэффициентов при запаздывающих членах будут смещенными и несостоятельными (хотя они и могут оказаться лучше других оценок с точки зрения средних квадратичных отклонений). Но подобного рода приближенные ограничения могут дать и состоятельные оценки — если они сформулированы в вероятностных терминах, как это было предложено Тейлом и Голдбергером [165], [163]². Однако (во всяком случае, автору этой книги) представляется, что при рассмотрении таких смешанных процедур оценивания в рамках полностью байесовского подхода можно гораздо лучше учесть априорную информацию вероятностного характера.

В любом случае такие вопросы теории оценивания непосредственно предметом этой главы *не* являются. Здесь речь будет идти скорее о выборе вида параметризации запаздывания. Ясно, что с любой из двух изложенных точек зрения желательно использовать всю имеющуюся в наличии априорную информацию, а со второй точки зрения к тому же желательно выбрать такой вид параметризации, который был бы достаточно гибким и позволял с необходимой степенью точности описывать все в принципе возможные структуры запаздываний.

² См. работы Янси, Бока и Джаджа [180], а также Меты и Своми [118], где анализируются некоторые свойства смешанных процедур оценивания Тейла для случая малых выборок.

В этой главе для параметризации запаздываний мы будем использовать сплайн-функции, которые в этом случае будут называться *сплайновыми запаздываниями*. Порядок изложения будет следующим. В разделах 6.2 и 6.3 дается теоретическое обоснование. Зачастую априорные соображения подсказывают, что коэффициенты при запаздывающих членах должны ложиться на некоторую гладкую кривую. Поэтому в разделе 6.2 приводится аналитическая интерпретация понятия «гладкости», а также указывается, что «самой гладкой» в некотором смысле функцией является кубический сплайн. В разделе 6.3 мы ослабим одно условие, выполнения которого часто требуют для параметризации запаздывания. А именно мы не будем требовать задания точной величины запаздывания. Это ограничение мы заменим менее жестким условием, которое естественным образом вновь приведет нас к использованию сплайнов. В отличие от разделов 6.2 и 6.3 в разделе 6.4 приводится «аппроксимационная» мотивировка целесообразности применения сплайновых запаздываний. При этом мы сравним робастность этого запаздывания и запаздывания Алмон. В разделе 6.5 многие из рассмотренных в предыдущих разделах понятий проиллюстрированы на примере конкретных задач, в которых используются как линейные, так и кубические сплайновые запаздывания. Наконец, в разделе 6.6 дается сводка результатов, а также содержатся некоторые замечания по их применению на практике.

6.2. ПЕРВАЯ МОТИВИРОВКА: ГЛАДКОСТЬ

Рассмотрим следующую модель с распределенным запаздыванием:

$$y_t = \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \dots + \beta_k x_{t-k} + \varepsilon_t \quad (t = 1, 2, \dots, T)$$

или

$$y = X \beta + \varepsilon,$$

где

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_T \end{bmatrix}; \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}; \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_T \end{bmatrix};$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_0 & \dots & x_{1-k} \\ x_2 & x_1 & \dots & x_{2-k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_T & x_{T-1} & \dots & x_{T-k} \end{bmatrix}.$$

Мы предполагаем, что во всех выборках значения x_t либо фиксированы, либо, если они случайны, распределены независимо от ε , причем вероятностный предел $\text{plim}(T^{-1}X'X)$ положительно определен. Предположим также, что $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$.

В литературе о распределенном запаздывании всюду постулируется, что коэффициенты при запаздывающих членах должны лежать на некоторой «гладкой» кривой и что резкие изменения их абсолютной

величины и знака маловероятны³. Так, в частности, Шиллер [151, с. 777] следующим образом обосновывает априорные предположения о гладкости: «Априорные предположения о гладкости первого порядка можно сравнить с гибким приспособлением для проведения кривых в чертежном деле. Его естественная форма — прямая линия; более того, кривые, которые с его помощью можно вычертить, будут иметь малые значения «второго дифференциала» (если только кривая не имеет очень резких изгибов)».

Интересно, что аналогия с чертежным инструментом для проведения кривых немедленно наводит на мысль попытаться применить в этой ситуации сплайн-функции, которые своим названием обязаны сходству с чертежным сплайном. Как мы отмечали в разделе 3.12, широкая популярность сплайн-функций в теории приближений в значительной степени вызвана присущим им свойством наилучшего приближения. Для удобства мы здесь еще раз переформулируем теорему 3.1.

Теорема 6.1. Пусть $\bar{t}_0 < \bar{t}_1 < \dots < \bar{t}_m$ ($m < k$) — набор значений абсцисс (которые мы будем называть узлами), а $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ — соответствующий набор значений ординат (коэффициентов при запаздывающих членах). Тогда в классе функций $f(t) \in C^2[t_0, t_m]$, таких, что $f(t_j) = \beta_j$ ($j = 0, 1, \dots, m$), интеграл

$$\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_m} [f''(t)]^2 dt \quad (2)$$

принимает минимальное значение в том случае, когда $f(t)$ есть естественный кубический сплайн, т. е. кубический сплайн третьего порядка, вторые производные которого в точках \bar{t}_0 и \bar{t}_m обращаются в нуль.

Если считать выражение (2) мерой гладкости, то теорема 6.1 в этом смысле говорит о том, что кубический сплайн дает «оптимальную» структуру запаздываний из всех структур, соответствующих узлам \bar{t}_j ($j = 0, 1, \dots, m$) и значениям ординат β_j ($j = 0, 1, \dots, m$). Однако эта оптимальность условна, поскольку она зависит от выбора узлов. К счастью, как мы убедимся в следующем разделе, расположение узлов

³ См. работы Симса [152], [153], где имеется контраргументация в терминах дискретных приближений к непрерывным моделям с распределенным запаздыванием. Взаимосвязь между дискретным распределением и соответствующим ему первичным непрерывным распределением зависит от локальной автокорреляции независимой переменной. Для локально гладких независимых переменных график дискретного распределения очень похож на непрерывное распределение. Однако маловероятно, чтобы дискретное распределение, соответствующее одностороннему непрерывному распределению, оказалось бы гладким около нулевого значения запаздывания. Таким образом, эти рассуждения означают, что в описанное в этом разделе гладкое кубическое сплайновое запаздывание не следует включать первую пару коэффициентов. В прочих случаях предложенная методика применима, как и показывает пример, содержащийся в разделе 6.5. Доводы в пользу обычного метода наименьших квадратов без ограничений приведены также в работе Каргилла и Майера [28].

часто диктуется теоретическими соображениями. Как бы то ни было, мы пока отложим рассмотрение процедуры выбора узлов до раздела 6.6.

Чтобы лучше понять смысл теоремы 6.1 и методику применения кубических сплайновых запаздываний, рассмотрим следующую ситуацию⁴. Предположим, у нас имеется модель с ежемесячно распределенным запаздыванием, причем общая величина запаздывания составляет один год ($k = 12$). Пусть на равном расстоянии друг от друга выбраны пять узлов, т. е. это точки 0, 3, 6, 9, 12. Тогда β можно записать в виде линейной комбинации соответствующих узлам коэффициентов при запаздывающих членах (весов запаздывания):

$$\beta = W_1 \gamma, \quad (3)$$

где $\gamma = [\beta_0, \beta_3, \beta_6, \beta_9, \beta_{12}]'$, а W_1 вычисляется по формуле (14) из главы 3 и имеет вид

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,5873 & 0,5132 & -0,1270 & 0,03175 & -0,005291 \\ 0,2341 & 0,8915 & -0,1587 & 0,03968 & -0,006614 \\ 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,07804 & 0,7646 & 0,3862 & -0,08730 & 0,01455 \\ -0,05291 & 0,3545 & 0,8042 & -0,1270 & 0,2116 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,02116 & -0,1270 & 0,8042 & 0,3545 & -0,05291 \\ 0,01455 & -0,08730 & 0,3862 & 0,7646 & -0,07804 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 \\ -0,006614 & 0,03968 & -0,1587 & 0,8915 & 0,2341 \\ -0,005291 & 0,03175 & -0,1270 & 0,5132 & 0,5873 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 \end{bmatrix}.$$

Подставляя (3) в (1), получаем

$$y = (XW_1) \gamma + \varepsilon, \quad (4)$$

что имеет вид стандартной линейной модели без ограничений. Теорема 6.1 говорит нам о том, что из всех возможных параметризаций запаздывания функциями из $C^2 [0, 12]$, проходящими через $\beta_0, \beta_3, \beta_6, \beta_9, \beta_{12}$, самую гладкую (в смысле (2)) параметризацию дает выражение (3).

Каким образом теперь приступить к процедуре оценивания, зависит от методологических воззрений исследователя. Статистик строго классического склада после учета всей априорной информации, которую

⁴ Всюду далее в этой главе мы будем называть естественный кубический сплайн просто кубическим сплайном (если только в тексте явно не указано обратное). После теоремы 6.1 такое соглашение вряд ли ведет к недоразумениям.

ему удастся собрать, перейдет, по-видимому, к непосредственному оцениванию γ из уравнения (4). Вслед за этим он с помощью обычных процедур проверки гипотез скорее всего займется проверкой состоятельности полученных оценок. Статистики, предпочитающие байесовские методы, будут, вероятнее всего, использовать упоминавшуюся «смешанную» методику Тейла или же полностью байесовский подход. В последнем варианте (как это делали Четти [30], Мушар и Орси [120], но в отличие от Лимера [106] и Шиллера [151]) для определения структуры запаздываний в первую очередь вводится некоторая экономная параметризация, после чего можно использовать информативную априорную сопряженную функцию плотности распределения вероятностей.

6.3. ВТОРАЯ МОТИВИРОВКА: ПЕРЕМЕННАЯ ВЕЛИЧИНА ЗАПАЗДЫВАНИЯ

В некоторых задачах нет необходимости налагать требования гладкости в смысле теоремы 6.1, достаточно одной лишь непрерывности. В этом случае один из простейших способов — представить запаздывание в виде непрерывной кусочно-линейной функции, т. е. в виде *линейного сплайна*. Так поступил Фишер в 1937 г., когда он один из первых сформулировал понятие о распределенном запаздывании [61]. Фишер предположил, что соответствующие запаздывающим членам коэффициенты регрессии образуют арифметическую прогрессию. Хотя в более поздних работах, например в работе Алмон [5], делается упор на использование многочленов более высокой степени, немонотонные запаздывания вполне могут быть представлены и обычными кусочно-линейными функциями. Такой вариант постановки задачи недавно привлек к себе внимание Симса [152, с. 562] и Кларка [32].

Простота и гибкость не являются единственными достоинствами линейного сплайна. Его особенно удобно использовать в тех случаях, когда точное значение величины запаздывания не известно, а задан лишь некоторый набор величин, среди которых есть и его истинное значение. Предположим, например, что в модели с месячным шагом величина запаздывания может принимать одно из трех значений, а именно два, три или четыре квартала. Рассмотрим множество всех линейных сплайнов с узлами в точках 0, 3, 6, 9 и 12 месяцев. Среди этих сплайнов имеются, конечно, и такие, график которых над интервалом [0,6] имеет форму перевернутой буквы V, а над интервалом [6,12] (или [9,12]) является горизонтальным отрезком, что соответствует нулевым значениям коэффициентов при запаздывающих членах с величиной запаздывания 6 (или 9) месяцев. Более того, можно легко провести проверку того, какая из величин запаздывания статистически значима.

В этом можно убедиться следующим образом. Подобно тому, как мы это сделали в случае формулы (3), представим коэффициенты при запаздывающих членах в виде линейной комбинации значений этих коэффициентов в узлах:

$$\beta = W_2 \gamma,$$

где

$$W_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Сформулируем теперь две пары гипотез:

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_6 = \beta_9 = \beta_{12} = 0, & & H'_0 : \beta_9 = \beta_{12} = 0, \\ H_1 : \beta_6 \neq 0, \text{ или } \beta_9 \neq 0, \text{ или } \beta_{12} \neq 0, & & H'_1 : \beta_9 \neq 0 \text{ или } \beta_{12} \neq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Они соответствуют проверке того, имеет ли запаздывание величину 6 или 9 месяцев соответственно. В свою очередь, проверкой гипотез $H''_0 : \beta_{12} = 0$ и $H''_1 : \beta_{12} \neq 0$ можно установить, прекращается ли эффект запаздывания по истечении 12 месяцев⁵.

Не следует недооценивать опасность ограничиться рассмотрением запаздывания фиксированной длины в тех случаях, когда точная величина запаздывания неизвестна. Так, в работе Шмидта и Уода [146, с. 12—13] указывается, что даже популярное запаздывание Алмон приводит к значительным затруднениям в тех случаях, когда истинная величина запаздывания избыточно специфицирована, поскольку многочлен степени $p < k$ может иметь на отрезке самое большее p нулей. Дополнительные ограничения возникают вследствие того, что в конечных точках заданы «граничные условия». И наконец, ко всему прочему условие непрерывности всех производных многочлена не совместимо с наличием на графике плоских участков, которые, разумеется, вполне допустимы в случае линейного сплайна.

Кубический сплайн также может, в принципе, содержать плоские куски, но условие непрерывности его первых и вторых производных налагает существенные ограничения на форму его остальных сегментов⁶. Например, если естественный кубический сплайн с узлами в точ-

⁵ Заметим, что эти различные величины запаздываний образуют множество, «вложенное» в запаздывание с некоторой максимальной величиной. Это не имеет места в том случае, когда нам приходится делать выбор из набора запаздываний Алмон различной величины.

⁶ Следует отметить, что в случае кубического сплайна гипотезу (5) необходимо дополнить на рассматриваемом интервале условием обращения второй производной в нуль (см. раздел 3.5).

ках 0, 3, 6, 9 и 12 имеет плоский участок над отрезком горизонтальной оси [6,12], то над отрезком [0,6] его график может быть либо выпуклым, либо вогнутым, но не тем и другим одновременно. В этом легко убедиться, воспользовавшись тем фактом, что вторая производная кубического сплайна является линейным сплайном. Если вводить такое ограничение нецелесообразно, то его можно ослабить, выбрав на интервале [0,6] еще несколько узлов, или же заменить условие обращения в нуль второй производной в левом конце отрезка условием иного вида ⁷.

В табл. 9 показано, какие последствия будет иметь условие непрерывности производных для кубического сплайна над пятью отрезками, узлами которого являются точки $\bar{t}_0, \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_5$ при условии, что над пятым отрезком расположен параллельный оси абсцисс плоский кусок. Запишем уравнение кубического сплайна над i -м интервалом в виде

$$S(t) = a_i + b_i(t - \bar{t}_i) + c_i(t - \bar{t}_i)^2 + d_i(t - \bar{t}_i)^3, \quad \bar{t}_{i-1} \leq t \leq \bar{t}_i$$

и обозначим длины следующих друг за другом интервалов через $h_i = \bar{t}_i - \bar{t}_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, 5$). Тогда коэффициенты сплайна над отрезками от второго до пятого должны иметь вид, приведенный в табл. 9.

Таблица 9

Коэффициенты кубического сплайна, правый сегмент которого лежит на оси абсцисс

i	a_i	b_i	c_i	d_i
5	0	0	0	0
4	0	0	0	d_4
3	$-d_4 h_4^3$	$3d_4 h_4^2$	$-3d_4 h_4$	d_3
2	$-d_4 h_4 [h_4^2 + 3h_4 h_3 + h_3^2] - d_3 h_3^3$	$3 [d_4 h_4 (h_4 + 2h_3) + h_3^2 d_3]$	$3h_3 (d_3 + d_4 h_4)$	d_2

Тот факт, что третья производная может иметь разрывы, находит свое выражение в том, что по мере удаления от плоского куска на каждом следующем интервале добавляется еще одна «степень свободы». Если, передвигаясь таким образом справа налево, мы дойдем до самого первого отрезка, на котором должно быть выполнено левое граничное условие, содержащееся в определении естественного кубического сплайна, то из этого условия будет следовать, что $c_1 = 0$.

6.4. СРАВНЕНИЕ РОБАСТНОСТИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ АЛМОН И СПЛАЙНОВОГО ЗАПАЗДЫВАНИЯ

Успех, которым сплайн-функции пользуются в теории приближений, а также сформулированное в разделе 6.2 свойство наилучшего приближения говорят в пользу того, что сплайновое запаздывание

⁷ См. раздел 3.8.

должно быть менее подвержено ошибкам спецификации, чем запаздывание Алмон ⁸. В этом разделе мы приведем соображения, подтверждающие эту точку зрения.

Потребуем, чтобы коэффициенты при запаздывающих членах в (1) удовлетворяли линейному условию

$$\beta = R\gamma, \quad (6)$$

где R есть $(k + 1) \times m$ -матрица известных констант, имеющая ранг m , γ — вектор-столбец из m неизвестных параметров. В случае кубического (или линейного) сплайнового запаздывания в качестве R можно взять матрицу W_1 (или W_2), вид которой приведен в разделе 6.2 (соответственно 6.3). В случае запаздывания Алмон R может принимать различную форму; например, коэффициенты β можно выразить, аналогично кубическому сплайну, в виде линейной комбинации значений ординат либо в виде линейной комбинации обычных полиномиальных коэффициентов ⁹.

Если выполняется соотношение (6), то получаемая из (1) обычным методом наименьших квадратов оценка для β имеет вид

$$\hat{\beta} = R\hat{\gamma} = R[(R'X'XR)^{-1}R'X'y] = Dy = DX\beta + D\epsilon,$$

где

$$D = R(R'X'XR)^{-1}R'X'$$

и

$$DD' = R(R'X'XR)^{-1}R'.$$

Матрица средних квадратичных ошибок для $\hat{\beta}$ имеет вид

$$\begin{aligned} M &= E(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)' = E[(DX - I)\beta + D\epsilon][(DX - I)\beta + D\epsilon]' = \\ &= \sigma^2 DD' + (DX - I)\beta\beta'(DX - I)'. \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку, однако, выражение (7) слишком громоздко для того, чтобы с ним можно было работать, было бы удобно пользоваться какой-нибудь скалярной функцией от матрицы (7) (например, следом или определителем). Поэтому мы последуем идеям Амеии и Моримуне [7, с. 379] и рассмотрим гораздо более простую функцию

$$\begin{aligned} \text{tr}(MT^{-1}X'X) &= \sigma^2 T^{-1} \text{tr}(DD'X'X) + \text{tr}[(DX - I)\beta\beta'(DX - I)' \times \\ &\quad \times T^{-1}X'X] = \sigma^2 T^{-1} \text{tr}[R(R'X'XR)^{-1}R'X'X] + \\ &+ \text{tr}[\beta'(DX - I)'T^{-1}X'X(DX - I)\beta] = \sigma^2 T^{-1}(k + 1) + \beta'[T^{-1}X'X - \\ &\quad - T^{-1}X'XR(RT^{-1}X'XR)^{-1}R'T^{-1}X'X]\beta. \end{aligned} \quad (8)$$

В пользу выражения (8) говорит тот факт, что оно равняется произведению T^{-1} на след матрицы средних квадратичных ошибок для оценки

⁸ О меньшей чувствительности сплайновых запаздываний к ошибкам в определении величины запаздывания уже говорилось в разделе 6.3.

⁹ См., например, [37].

$\mathbf{X}\beta$, и тем самым дает меру того, насколько хорошо мы можем оценить систематическую часть зависимой переменной ¹⁰.

Вычисляя при различных \mathbf{R} величину (8), можно в некотором смысле сравнить эффективность запаздывания Алмон и различных сплайновых запаздываний. Однако прежде чем перейти к этому, мы еще упростим выражение (8), вновь воспользовавшись методикой Амеии и Моримуне [7]. Пусть переменная x_t соответствует стандартному авторегрессионному процессу первого порядка с параметрами

$$E(x_t) = 0 \text{ и } E(x_t x_{t+s}) = \sigma_x^2 \rho^{|s|} / (1 - \rho^2).$$

Вычислим вероятностный предел (8):

$$\text{plim} [\text{tr}(\mathbf{M}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X})] = \sigma_x^2 \beta' [\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}\mathbf{R}(\mathbf{R}'\mathbf{\Omega}\mathbf{R})^{-1}\mathbf{R}'\mathbf{\Omega}] \beta, \quad (9)$$

где

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{bmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho^k \\ \rho & 1 & \dots & \rho^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^k & \rho^{k-1} & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Пусть теперь $\mathbf{R} = \mathbf{A}$ соответствует случаю запаздывания Алмон (AL), а $\mathbf{R} = \mathbf{S}$ — случаю сплайнового запаздывания (SL). Вычислим для каждого из этих двух вариантов вероятностный предел (9) и составим отношение ¹¹

$$\lambda = \frac{\text{plim} [\text{tr}(\mathbf{M}_{SL}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X})]}{\text{plim} [\text{tr}(\mathbf{M}_{AL}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X})]} = \frac{\beta' [\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}\mathbf{S}(\mathbf{S}'\mathbf{\Omega}\mathbf{S})^{-1}\mathbf{S}'\mathbf{\Omega}] \beta}{\beta' [\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{\Omega}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{\Omega}] \beta}. \quad (10)$$

Для того чтобы, несмотря на наличие большого числа неизвестных параметров, все-таки сформулировать некоторые осмысленные утверждения относительно (10), мы поступим следующим образом.

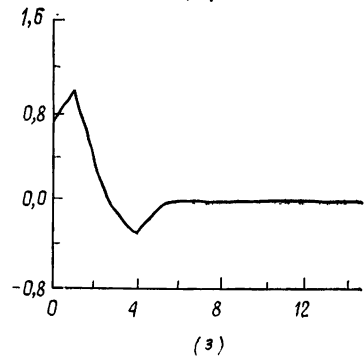
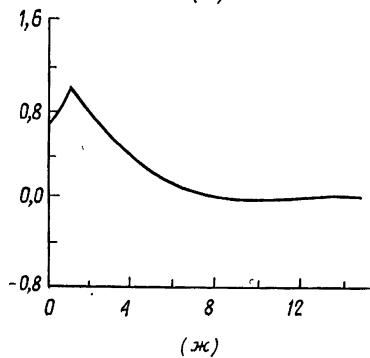
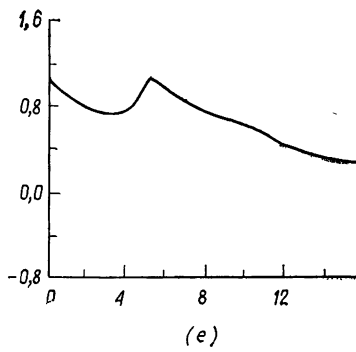
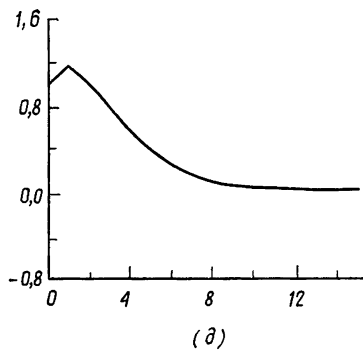
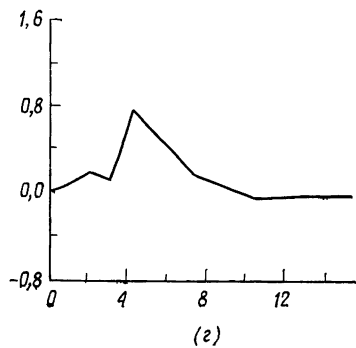
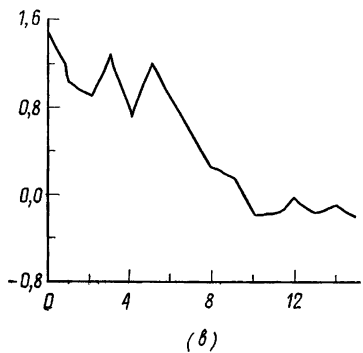
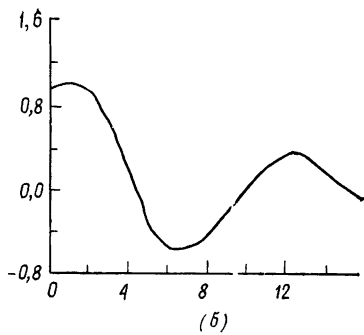
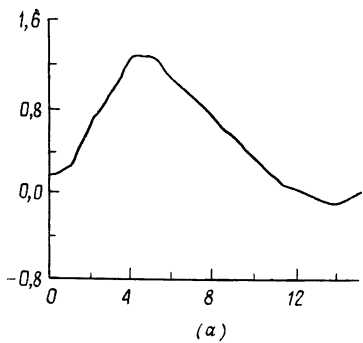
Во-первых, используем двенадцать наборов весов запаздываний (величин β), приведенных в работе Амеии и Моримуне [7, с. 380], а также три набора весов, имеющихя у Каргилла и Майера [28, с. 1036—

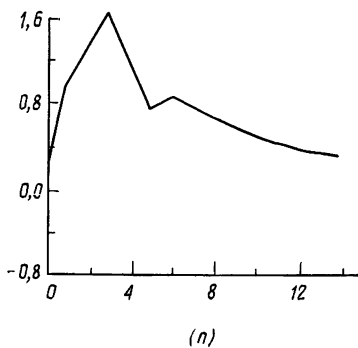
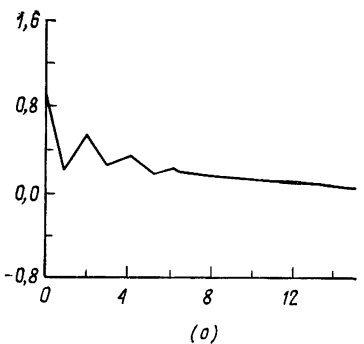
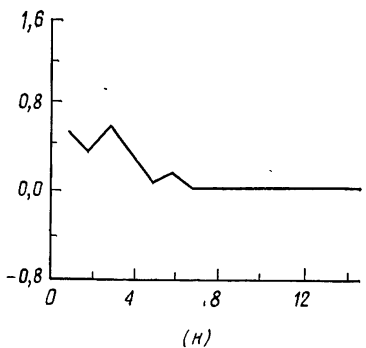
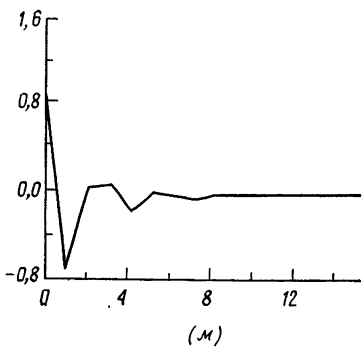
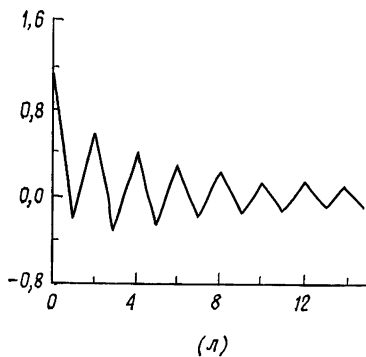
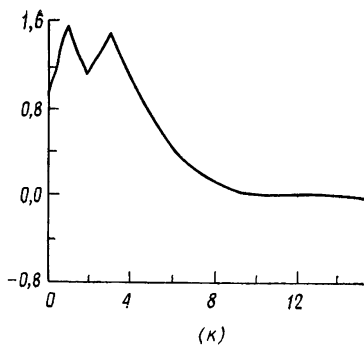
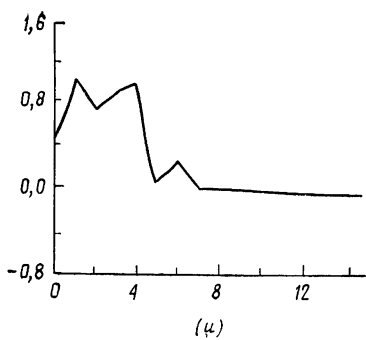
¹⁰ Амеия и Моримуне [7] касались выбора «оптимальной» степени многочлена в запаздывании Алмон. Они использовали в своей работе другую параметризацию запаздывания Алмон, отличающуюся от (6). Авторы сообщают также, что им удалось вычислить след матрицы (7) при некоторых значениях параметра и что их результаты не сильно отличаются от результатов, полученных с помощью выражения (8).

¹¹ В работе [7] Амеия и Моримуне заменили второй член выражения (8) его вероятностным пределом, а первый член оставили нетронутым. Тогда полученное для эффективности выражение можно рассматривать как асимптотическое ожидание существенной части обычной средней квадратичной ошибки прогноза (см. [7, с. 379]). Если бы мы действовали таким образом и здесь, то вместо выражения (10) мы бы имели

$$(\theta + \beta' [\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}\mathbf{S}(\mathbf{S}'\mathbf{\Omega}\mathbf{S})^{-1}\mathbf{S}'\mathbf{\Omega}] \beta) / (\theta + \beta' [\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{\Omega}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{\Omega}] \beta),$$

где $\theta = (k + 1) \sigma^2 / T \sigma_x^2$. В этом смысле (10) есть просто предельный случай при $\theta \rightarrow 0$. Хотя в таком варианте относительная эффективность двух запаздываний различных типов будет с ростом θ стремиться к единице, разность их абсолютных эффективностей будет при этом оставаться постоянной.





1037] ¹². Соответствующие графики (порядок расположения которых вскоре станет понятным) изображены на рис. 6.1. Графики (а), (в), (е), (и), (н) и (п) соответствуют оценкам, полученным в различных прикладных работах, и взяты из статьи Амеии и Моримуне [7] ¹³. Графики (б), (д), (л), (м) и (о) также взяты из работы Амеии и Моримуне [7], они соответствуют авторегрессионным моделям второго порядка с различными значениями параметров. Графики (г), (ж) и (з) на рис. 6.1 взяты из работы Каргилла и Майера [28].

Во-вторых, выберем $k = 15$. Это соответствует максимальной величине запаздывания, встречающейся среди этих наборов β . Поскольку у девяти из пятнадцати наборов β величина запаздывания на самом деле меньше, чем пятнадцать периодов (например, веса, показанные на графике (з) рис. 6.1, соответствуют величине запаздывания всего в пять периодов), такая спецификация позволит нам провести сравнение робастности относительно неправильной спецификации величины запаздывания.

В-третьих, выберем запаздывание Алмон и сплайновое запаздывание с числом неизвестных параметров $m = 4$. В первом случае это соответствует кубическому запаздыванию Алмон, которое, по всей видимости, характерно для многих прикладных задач, имеющих в литературе. Во втором случае это отвечает сплайновому запаздыванию с четырьмя равноотстоящими узлами в точках 0, 5, 10 и 15 ¹⁴. Заметим, что «для чистоты эксперимента» в качестве узловых точек не были выбраны возможные «кандидаты на должность» величин запаздывания. Поскольку на практике мы вполне можем оказаться в состоянии выбирать узлы именно таким образом, представленные здесь результаты до некоторой степени *уменьшают* эффективность сплайнового запаздывания.

Наконец, в-четвертых, мы будем вычислять отношение (10) при следующих значениях ρ : 0,1; 0,3; 0,5; 0,7 и 0,9. Такой выбор ρ даст возможность проанализировать влияние гладкости рядов объясняющих переменных на каждую из двух параметризаций запаздывания.

Результаты этих вычислений для кубического сплайнового запаздывания приведены в табл. 10, а для линейного сплайнового запаздывания — в табл. 11. Как можно видеть, в среднем сплайновые запаздывания «работают» достаточно хорошо. Они дают выигрыш эффективности величиной примерно в 9% в случае кубического сплайна и 8% в случае линейного сплайна ¹⁵. Самый большой выигрыш в эффективно-

¹² Третий набор весов, взятый из работы Каргилла и Майера [28, с. 1037], соответствует их модели № 3. В этой модели распределенному запаздыванию подвергнуты две различные переменные, но здесь используются только те веса, которые отвечают второй переменной.

¹³ Ссылки на источники, из которых были взяты эти семь наборов весов, приведены в работе Амеии и Моримуне [7]. Ни в одной из этих прикладных задач не применялось ни запаздывание Алмон, ни сплайновое запаздывание.

¹⁴ В случае кубического сплайнового запаздывания матрица была вычислена с помощью формулы (14) главы 3. Ее вид приведен в приложении 6.7.

¹⁵ Разумеется, вопрос о том, действительно ли эти средние имеют отношение к делу, зависит от того, соответствуют ли равные веса, приписываемые при вычислении средних каждому из пятнадцати наборов величин β и пяти значениям ρ , частоте, с которой они действительно встречаются на практике.

Таблица 10

Значения величины λ для кубического сплайнового запаздывания

Набор β	$\rho=0,1$	$\rho=0,3$	$\rho=0,5$	$\rho=0,7$	$\rho=0,9$	Среднее по строке
(а)	0,456	0,441	0,428	0,416	0,406	0,429
(б)	0,712	0,709	0,709	0,713	0,720	0,713
(в)	0,800	0,750	0,713	0,694	0,692	0,730
(г)	0,779	0,748	0,725	0,712	0,707	0,734
(д)	0,850	0,821	0,796	0,781	0,779	0,805
(е)	0,853	0,835	0,819	0,809	0,809	0,825
(ж)	0,930	0,901	0,878	0,865	0,864	0,888
(з)	0,931	0,951	0,974	0,990	0,997	0,969
(и)	1,02	1,00	0,986	0,975	0,973	0,990
(к)	1,03	1,02	1,00	0,987	0,983	1,00
(л)	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08	1,03
(м)	1,06	1,06	1,06	1,06	1,07	1,06
(н)	1,13	1,13	1,14	1,15	1,17	1,14
(о)	1,11	1,13	1,14	1,16	1,18	1,14
(п)	1,21	1,20	1,19	1,19	1,19	1,20
Среднее по столбцу	0,928	0,916	0,908	0,905	0,907	0,913

Таблица 11

Значения величины λ для линейного сплайнового запаздывания

Набор β	$\rho=0,1$	$\rho=0,3$	$\rho=0,5$	$\rho=0,7$	$\rho=0,9$	Среднее по строке
(а)	0,527	0,519	0,516	0,515	0,514	0,518
(б)	0,650	0,660	0,674	0,689	0,699	0,675
(в)	0,614	0,544	0,494	0,469	0,465	0,517
(г)	0,600	0,546	0,511	0,493	0,485	0,527
(д)	0,833	0,806	0,793	0,791	0,793	0,804
(е)	0,689	0,679	0,676	0,681	0,692	0,683
(ж)	0,907	0,877	0,860	0,857	0,865	0,873
(з)	0,954	0,974	0,991	1,00	1,00	0,985
(и)	1,06	1,05	1,04	1,04	1,04	1,05
(к)	1,18	1,17	1,16	1,14	1,13	1,16
(л)	1,05	1,06	1,08	1,10	1,12	1,08
(м)	1,09	1,09	1,09	1,10	1,11	1,10
(н)	1,21	1,23	1,27	1,30	1,34	1,27
(о)	1,17	1,20	1,22	1,25	1,28	1,22
(п)	1,44	1,41	1,38	1,36	1,35	1,39
Среднее по столбцу	0,932	0,921	0,917	0,919	0,926	0,923

сти (для большинства наборов β) сплайновое запаздывание дает при $0,5 \leq \rho \leq 0,7$.

К сожалению, влияние «природы» формы запаздывания на величину λ не столь ясно. Для удобства графики были расположены в порядке убывания эффективности кубического запаздывания (от (а) до (п)). Графики от (а) до (и) соответствуют тем девяти наборам весов запаздываний, для которых кубическое запаздывание в среднем превосходит запаздывание Алмон, а графики от (к) до (п) соответствуют шести остальным наборам весов. В случае линейного сплайна относительный выигрыш эффективности был таким же, кроме набора (и). В целом же (по крайней мере по мнению автора этой книги) для наиболее «разумных» видов запаздываний (в особенности для графиков (а), (д) и (ж)) сплайновые запаздывания «работают» лучше, чем запаздывание Алмон. В тех случаях, когда запаздывание Алмон оказывается более эффективным (т. е. для графиков от (к) до (п)), имеется тенденция к резкому скачкообразному изменению в значениях весовых коэффициентов при переходе от нулевого запаздывания к запаздыванию величиной в один период¹⁶. Поскольку в определении естественного кубического сплайна требуется, чтобы вторая производная в нуле обращалась в нуль, такое условие гладкости, возможно, отчасти и объясняет относительную неэффективность сплайнового запаздывания в этих случаях. Это — дополнительный аргумент в пользу того, что при параметризации запаздывания в нее не следует включать весовой коэффициент, соответствующий члену с нулевым запаздыванием.

Конечно, непонятно, насколько общими можно считать все эти успешные (для сплайновых запаздываний) результаты. Приведенные здесь наборы весов были выбраны нами по следующим причинам: (1) они использовались в недавних работах для выбора и сравнения различных параметризаций запаздываний, кроме того, (2) они охватывают исключительно широкий класс запаздываний различной формы и (3) по-видимому, никоим образом заранее не предопределяют и не портят результаты. Разумеется, как и во всех задачах такого рода, делать общие выводы здесь очень опасно, однако, надо надеяться, не более опасно, чем на основе подхода, развиваемого в работах Амеии и Моримуне [7], а также Каргилла и Майера [28].

6.5. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧЕ О ДОХОДНОСТИ КОРПОРАТИВНЫХ ОБЛИГАЦИЙ

Для иллюстрации практических возможностей сплайновых запаздываний мы в этом разделе приведем пример одной конкретной задачи. В работе Шиллера [151, с. 783] строится модель, в которой средняя доходность корпоративных облигаций рассматривается как имеющая вид распределенного запаздывания функция от величины ставки по коммерческим бумагам. Имеется много работ (см., например, [119]), в которых строится модель, теоретически связывающая долгосрочную ставку с краткосрочной. Обычно в таких случаях предполагается, что коэф-

¹⁶ Вспомним сноску 3.

коэффициенты при запаздывающих членах отражают некоторый «механизм ожидания» и, как правило, лежат на какой-нибудь гладкой кривой (кроме значения β_0 , см. сноску 3).

В соответствии с этим строится модель вида (1) с авторегрессионным членом первого порядка и $k = 18$. Зависимой переменной соответствуют данные Совета федеральной резервной системы, описывающие доходность корпоративных первоклассных ценных бумаг, а объясняющими переменными являются величины процентных ставок по перво-

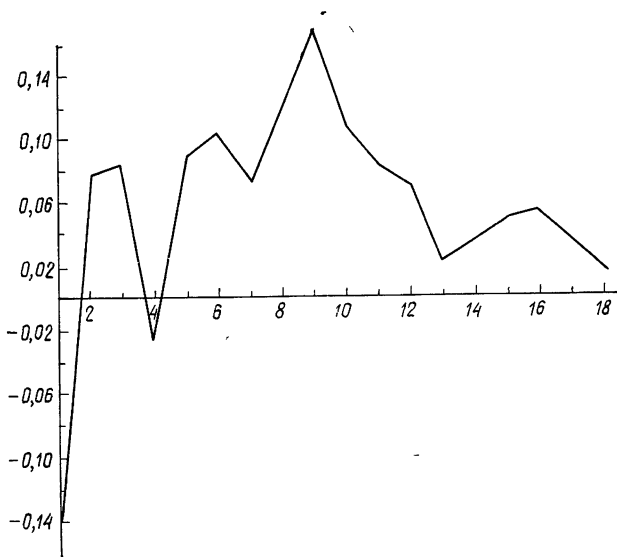


Рис. 6.2. Оценки коэффициентов при запаздывающих членах, полученные методом наименьших квадратов без ограничений

классным коммерческим бумагам со сроком погашения от четырех до шести месяцев, причем $t = 1$ соответствует третьему кварталу 1955 г., а $T = 48$ — четвертому кварталу 1969 г.¹⁷

Основываясь на результатах, полученных с помощью многих таких моделей, описание которых содержится в работе Модильяни и Шиллера [119], можно априори ожидать, что форма запаздывания будет обладать следующими свойствами. Прежде всего, начиная с запаздывания на один квартал, значения весовых коэффициентов будут быстро возрастать, переходя от отрицательных к положительным. Далее, они должны достичь максимума около точки, соответствующей запаздыванию на шесть или семь кварталов, а затем будут убывать, причем в районе точки с запаздыванием на девять кварталов должна находиться точка

¹⁷ В отличие от Шиллера мы для поправки на авторегрессию первого порядка в возмущающем члене применили двушаговый метод Прайса—Уинстена. Данные для этой работы взяты из бюллетеня Совета федеральной резервной системы за 1953—1970 гг.

Результаты оценивания коэффициентов сплайновых запаздываний

Величина	Кубическое сплайновое запаздывание	Линейное сплайновое запаздывание	Величина	Кубическое сплайновое запаздывание	Линейное сплайновое запаздывание
$\hat{\alpha}$	0,3714 (0,07192)	0,3738 (0,07220)	$\hat{\gamma}_3$	0,06903 (0,008051)	0,05156 (0,01232)
$\hat{\beta}_0$	0,2943 (0,03472)	0,2878 (0,03375)	$\hat{\gamma}_4$	0,006106 (0,01541)	0,005272 (0,01553)
$\hat{\gamma}_1$	-0,02677 (0,01971)	-0,01644 (0,01687)	s	0,1080	0,1034
$\hat{\gamma}_2$	0,06794 (0,009752)	0,08462 (0,001115)	$\hat{\rho}$	0,5335	0,5334
			D. W.	1,616	1,617

Примечание. Цифры в скобках — стандартные ошибки оценивания.

перегиба, а где-то около запаздывания величиной в двенадцать кварталов начнется выход на асимптоту.

Эти априорные соображения и были положены в основу при выборе узлов для двух приведенных далее сплайновых запаздываний (каждое из которых содержит четыре неизвестных параметра). В первую оче-

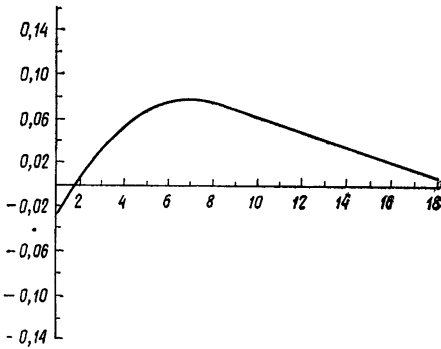


Рис. 6.3. Кубическое сплайновое запаздывание

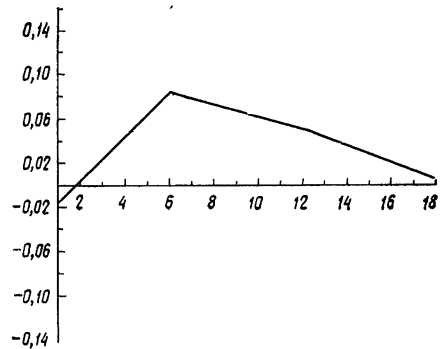


Рис. 6.4. Линейное сплайновое запаздывание

редь, следуя общим соображениям Уолда [179], которые будут кратко изложены в разделе 8.5, был выбран кубический сплайн с узлами в точках 1, 5, 9 и 18. Такой выбор узлов был сделан на основе общих соображений Уолда, в соответствии с которыми точки экстремума следует располагать в середине интервалов, а точки перегиба — в районе узлов. В качестве второго варианта было рассмотрено линейное сплайновое запаздывание с узлами в точках 1, 6, 12 и 18. Эти значения были выбраны в связи с тем, что около запаздывания на шесть кварталов ожида-

ется максимум, а за точкой, соответствующей запаздыванию на двенадцать кварталов, возможен выход на асимптоту.

Взглянув на рис. 6.2, можно сразу убедиться в нецелесообразности применения метода наименьших квадратов. На нем показаны полукривые этим методом оценки коэффициентов при запаздывающих членах. При этом оказывается, что запаздывание не только исключительно нерегулярно, но и что для всех коэффициентов весьма велики средние квадратичные ошибки. В отличие от этого сплайновое запаздывание дает весьма приемлемые результаты. Считая коэффициент при члене с нулевым запаздыванием «свободным» и требуя, чтобы все остальные коэффициенты лежали на указанных выше сплайн-функциях, можно получить оценки для коэффициентов и их характеристики (см. табл. 12, где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и γ_4 суть веса запаздываний в соответствующих узлах). На рис. 6.3 показан график, на который ложатся коэффициенты кубического сплайнового запаздывания, а на рис. 6.4 — такой же график для линейного сплайнового запаздывания. Как видно из этих графиков, оба сплайновых запаздывания дают удивительно приятные и похожие друг на друга результаты¹⁸.

6.6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой главе в наши намерения входило рассмотреть лишь один аспект модели с распределенным запаздыванием, а именно параметризацию коэффициентов при запаздывающих членах (весов запаздывания) При этом мы пренебрегли многими обстоятельствами: возмущающим членом, наличием в модели объясняющих переменных, проблемами одновременности уравнений. Тем не менее при таком изложении можно, по-видимому, сделать три общих вывода, которые, скорее всего, не пострадают, если вновь вернуться к рассмотрению полной модели (подобной той, которой мы занимались в разделе 6.5).

Во-первых, если требуется, чтобы над некоторым промежутком форма запаздывания была гладкой, то наилучшее запаздывание в смысле теоремы 6.1 дает кубический сплайн. Такая параметризация может быть наложена неслучайным образом (т. е. в точном виде) или стохастически — в зависимости от методологических воззрений того или иного автора. В последнем случае можно построить аналог «смешанного оценителя» для кубического сплайнового запаздывания, действуя во многом так же, как Тейлор [162] при построении аналога «смешанного оценителя» для запаздывания Шиллера. Еще более привлекательной альтернативой является применение полностью байесовского подхода (см., например, работу Зельнера [181]).

Во-вторых, пусть у нас имеется лишь некий набор «кандидатов на должность» величин запаздывания, но ее точное значение неизвестно. В этом случае можно воспользоваться линейным сплайновым за-

¹⁸ Ожидавшийся выход на асимптоту так и не осуществился. В случае линейного сплайнового запаздывания нулевая гипотеза $H_0: \gamma_3 = \gamma_4$ была отвергнута в пользу $H_1: \gamma_3 \neq \gamma_4$ на уровне значимости 5%. Это указывает на то, что последний участок на самом деле существенно отличается от прямой линии. Более того, была с большой уверенностью подтверждена нулевая гипотеза о том, что запаздывание имеет именно такую спецификацию.

паздыванием (или, быть может, кубическим сплайновым запаздыванием) для формулировки критерия проверки величины запаздывания — разумеется, в предположении, что реальное запаздывание имеет вид линейного (или кубического) сплайна. С помощью построенного таким образом критерия проверку величины сплайнового запаздывания можно проводить в рамках одной модели, что гораздо предпочтительнее «рыболовной» методики, обычно применяемой в прикладной литературе ¹⁹.

В-третьих, даже проведенный в разделе 6.4 неполный анализ указывает на то, что сплайновые запаздывания дают бóльшую робастность, чем запаздывание Алмон. С точки зрения перспектив использования сплайновых запаздываний эти результаты надо, как минимум, считать обнадеживающими.

Хотя приведенные результаты и внушают надежду, мы вовсе не претендуем на то, что они выше всякой критики. В большинстве изданий о распределенном запаздывании очень быстро появляется критика чужой методики, но очень редко предлагаются позитивные решения. В случае сплайновых запаздываний наиболее уязвимой для критики стороной является, по всей вероятности, вопрос о выборе узлов. В предыдущих главах мы делали упор на выборе расположения узлов с помощью тех или иных теоретических соображений. Именно таким образом мы поступали, выбирая в качестве узлов возможные значения величины запаздывания ²⁰. Это, однако, не означает, что следует автоматически исключить все другие варианты подхода к этой проблеме. Одной из возможных альтернатив является эмпирическое правило Уолда, которое будет описано в разделе 8.5. Еще одна возможность — использовать многочисленные процедуры обращения с переменными узлами, которые мы рассмотрим в главе 7. Наиболее привлекательным среди них является, по всей видимости, байесовский подход. Байесовский подход предполагает наличие той или иной априорной информации, которая, по меньшей мере, заставит специалиста заняться (потенциально плодотворным) обдумыванием исследуемой модели, что само по себе полезно, даже если за этим не последует более серьезных результатов. Конечно, и сплайновые запаздывания не застрахованы от злоупотреблений со стороны пользователей, и потенциальных участников «рыболовных экспедиций» можно лишь пытаться переубедить, но вряд ли всем им удастся помешать.

В заключение стоит, наверное, напомнить одно замечание Лимера [106, с. 1080]: «В конечном счете выбор лучшей из методик сведется к вопросу о том, «какая из постелей удобнее», а вовсе не к вопросу о том, «на какой постели чистое белье». Если пользоваться терминологией Лимера, автор находит «постель № 1» (запаздывание Алмон) страшно неудобной, но блаженно спит в «постели № 2» (сплайновое запаздывание), хотя, возможно, всего-навсего потому, что на ней не так тесно.

¹⁹ См. работу Коэна, Гиллинхэма и Хайена [34], в которой содержатся материалы, касающиеся неудовлетворительных результатов применения стандартных критериев согласия к задаче определения величины и формы запаздываний.

²⁰ Выбор узла, соответствующего окончанию эффекта запаздывания, есть крайний пример ситуации, когда считается, что два соседних отрезка различны. Непонятно, представляет ли интерес в каком-нибудь ином (не «концевом») случае проверка на совпадение для двух соседних отрезков.

6.7. ПРИЛОЖЕНИЕ

Матрица преобразования для естественного кубического сплайна с узлами в точках 0, 5, 10 и 15 (см. раздел 6. 4) имеет следующий вид:

$$W = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,7488 & 0,3152 & -0,07680 & 0,01280 \\ 0,5104 & 0,6016 & -0,1344 & 0,02240 \\ 0,2976 & 0,8304 & -0,1536 & 0,02560 \\ 0,1232 & 0,9728 & -0,1152 & 0,01920 \\ 0,0000 & 1,000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,06400 & 0,8960 & 0,2000 & -0,03200 \\ -0,08000 & 0,6960 & 0,4480 & -0,06400 \\ -0,06400 & 0,4480 & 0,6960 & -0,08000 \\ -0,03200 & 0,2000 & 0,8960 & -0,06400 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,000 & 0,0000 \\ 0,01920 & -0,1152 & 0,9728 & 0,1232 \\ 0,02560 & -0,1536 & 0,8304 & 0,2976 \\ 0,02240 & -0,1344 & 0,6016 & 0,5104 \\ 0,01280 & -0,07680 & 0,3152 & 0,7488 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,000 \end{bmatrix}$$

Матрица преобразования для естественного кубического сплайна с узлами в точках 1, 5, 9 и 18 (см. раздел 6.5) такова:

$$W = \begin{bmatrix} 1,000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,6891 & 0,3813 & -0,07448 & 0,004167 \\ 0,4025 & 0,7100 & -0,1192 & 0,006667 \\ 0,1647 & 0,9338 & -0,1043 & 0,005833 \\ 0,0000 & 1,000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,07594 & 0,8775 & 0,2093 & -0,01083 \\ -0,08250 & 0,6200 & 0,4825 & -0,02000 \\ -0,04781 & 0,3025 & 0,7645 & -0,01917 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,000 & 0,0000 \\ 0,03778 & -0,2267 & 1,145 & 0,04395 \\ 0,06222 & -0,3733 & 1,200 & 0,1116 \\ 0,07500 & -0,4500 & 1,175 & 0,2000 \\ 0,07778 & -0,4667 & 1,083 & 0,3062 \\ 0,07222 & -0,4333 & 0,9340 & 0,4272 \\ 0,06000 & -0,3600 & 0,7400 & 0,5600 \\ 0,04278 & -0,2567 & 0,5122 & 0,7017 \\ 0,02222 & -0,1333 & 0,2617 & 0,8494 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,000 \end{bmatrix}$$

7.1. ВВЕДЕНИЕ

Имеется два основных способа разрешить параметру регрессионной модели изменяться. Во-первых, можно считать, что параметр может принимать бесконечное число значений. Такая ситуация в общем виде описывается *моделью со случайными коэффициентами* (см. [159]) или же одним из ее частных случаев — моделью возмущений. Во-вторых, можно считать, что параметры изменяются лишь небольшое число раз. При этом допустимые значения параметра часто называют режимами, а большая часть моделей такого типа является частным случаем *регрессионной модели с переключением* (см. [75]).

В этом обзоре мы будем говорить, что в модели происходит структурное изменение, если параметры модели изменяют свои значения на пространстве данных. В этом смысле особенно привлекательна регрессионная модель с переключением, поскольку «переключение» значений параметра с одного режима на другой можно рассматривать как выражение происходящего в модели структурного изменения. Общая модель со случайными коэффициентами для этой цели не так удобна, поскольку в ней отсутствует «встроенная структура» изменения значений параметров¹.

В главах 1—6 и 8 рассматриваются способы оценивания и проверки гипотез, касающиеся моделей, в которых возможные точки структурных изменений предполагаются априори известными. Для многих прикладных задач это предположение вполне разумно — в особенности в тех моделях, где структурное изменение претерпевает зависимость некоторой величины от таких параметров, как время, образование или возраст. Но бывает, конечно, что такие априорные соображе-

¹ Некоторое отношение к делу имеют систематические разновидности общей регрессионной модели со случайными коэффициентами, например модели, описанные Белсли [17]—[19], Кули и Прескоттом [36], Купером [38] и Сарджисом. Эти модели предусматривают наличие некоторой структуры изменения параметров. Однако в таких моделях параметры могут изменяться непрерывно. Настоящий обзор касается структурных изменений в моделях, параметры которых изменяются только «небольшое» число раз или могут принимать лишь небольшое число значений. Рассматриваемые здесь модели можно включить в рамки общей модели со случайными коэффициентами систематического типа, допуская возможность «структурного изменения» в способе изменения параметров со временем.

ния либо вообще отсутствуют, либо они очень расплывчаты, и тогда предпочтительнее использовать некоторую вероятностную модель, в которой точки структурных изменений считаются неизвестными.

Настоящий обзор начинается разделом 7.2, в котором описаны различные процедуры оценивания и проверки гипотез, разработанные для регрессионной модели с переключением общего вида. Первопроходцами в этой области, усилиям которых многие обязаны своими последующими работами, были Ричард Квандт и Стивен Голдфельд. Затем в разделе 7.3 рассматриваются методы, разработанные для одного частного случая регрессионных моделей, а именно когда отдельные режимы соответствуют соседним интервалам, лежащим на одной и той же оси независимых переменных, и когда, кроме того, полная функция регрессии непрерывна. Другими словами, раздел 7.3 посвящен частному случаю регрессионной модели с переключением, соответствующему *сплайн-функциям*. К сожалению, с помощью изложенных в разделах 7.2 и 7.3 классических соображений нет возможности получить априорную информацию о расположении точек переключения или узлов. Одно дело сказать, что не известно точное положение узла, и совсем другое — что у нас нет никакой информации, касающейся расположения этого узла. Поэтому в разделе 7.4 рассматривается байесовский подход, который учитывает априорную информацию о распределении узлов. Наконец, раздел 7.5 завершает эту главу рекомендациями автора относительно «практического» анализа моделей со структурными изменениями.

7.2. РЕГРЕССИОННЫЕ МОДЕЛИ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ

Регрессионная модель с переключением, в которой имеются два режима, может быть построена следующим образом². Пусть у нас имеется n независимых наблюдений объясняемой переменной y и k объясняющих переменных. Рассмотрим два режима:

$$y_i = \mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta}_1 + \varepsilon_{i1}, \quad i \in I_1; \quad (1)$$

$$y_i = \mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta}_2 + \varepsilon_{i2}, \quad i \in I_2, \quad (2)$$

где \mathbf{x}_i — вектор-строка, соответствующая i -му наблюдению k независимых переменных; $\boldsymbol{\beta}_1$ и $\boldsymbol{\beta}_2$ — векторы коэффициентов размерности $k \times 1$; I_1 и I_2 — наборы индексов, а ε_{i1} и ε_{i2} — остаточные члены (обычно предполагается, что они распределены независимо как $N(0, \sigma_1^2)$ и $N(0, \sigma_2^2)$ соответственно).

Главное различие между типами регрессионных моделей с переключением состоит в способе, которым наблюдения ставятся в соответствие каждому из режимов. Эта процедура может иметь вероятностный характер (т.е. зависеть от неизвестных вероятностей λ и $1 - \lambda$) или же может производиться детерминированным образом (т.е. путем сравнения значения наблюдаемой переменной z , которая, возможно, я

² Общий случай, когда число режимов превышает два, см. в работе Голдфельда и Квандта [75, с. 480].

ляется одной из регрессионных переменных, с некоторым пороговым значением z_0).

В случае, когда наблюдения распределяются по режимам чисто случайно (т.е. стохастически), применяют следующую процедуру. В предположении, что остаточные члены имеют независимые нормальные распределения, функция плотности для i -го наблюдения будет иметь вид

$$f_j(y_i) = (2\pi\sigma_j^2)^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \sigma_j^{-2} (y_i - x_i \beta_j)^2 \right],$$

где индексы $j = 1, 2$ обозначают соответствующие режимы.

Следуя примеру Квандта [138], можно считать, что природа выбирает режимы № 1 и 2 с вероятностями λ и $1 - \lambda$ соответственно. Такой подход очень напоминает задачи со «смешанным распределением» или модели со случайными коэффициентами, в которых параметр может принимать только два возможных значения³. При этом функция плотности для y_i записывается следующим образом:

$$g(y_i) = \lambda f_1(y_i) + (1 - \lambda) f_2(y_i),$$

а логарифмическая функция правдоподобия имеет вид

$$L(\beta_1, \beta_2, \sigma_1, \sigma_2, \lambda) = \sum_{i=1}^n \ln [\lambda f_{i1} + (1 - \lambda) f_{i2}]. \quad (3)$$

Максимизация выражения (3) по $\beta_1, \beta_2, \sigma_1, \sigma_2$ и λ приводит к *несостоятельным* оценкам. Этот факт, который остался незамеченным в ранних работах по регрессионным моделям с переклещением, — следствие того, что логарифмическая функция правдоподобия (3) стремится к бесконечности, когда дисперсия любого из режимов стремится к нулю⁴. Если, однако, предположить, что $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ или, в более общем виде,

$$\sigma_2^2 = \alpha \sigma_1^2 \quad (\alpha > 0), \quad (4)$$

где α неизвестно, метод наибольшего правдоподобия дает состоятельные оценки. К сожалению, свойства распределений для оценок в значительной степени не известны, поскольку, хотя для $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$

³ О последних работах в области задач со смешанными распределениями см. [111] и [142]. Публикации в этой области восходят по меньшей мере к Пирсону (1894 г.), и с того времени число их быстро увеличивается. В работе Макдональда [111, с. 231] сказано, что он и Бризбуа подготовили библиографию, включающую более 200 работ, имеющих непосредственное отношение к конечным смесям, еще большее число работ о бесконечных смесях, непрерывных смесях и труды на другие более общие темы.

⁴ См., например, работу Своми и Мета [160] или же более раннюю (но тоже имеющую отношение к делу) работу Кифера и Вольфовица [104, с. 905]. Хозмер [97] с помощью метода Монте-Карло получил результаты, которые говорят о плохом качестве оценок, полученных методом наибольшего правдоподобия в том случае, когда дисперсии не известны и не равны. Кроме того, в случае $\lambda = \frac{1}{2}$ возникает проблема идентификации. Подробно эти вопросы изложены в работах [142] и [160], а также в публикациях, на которые ссылаются авторы.

выполняются необходимые условия регулярности, их смесь $g(\cdot)$ не обязана им удовлетворять. Кроме того, чтобы смешанная функция плотности не могла принимать отрицательные значения, следует наложить ограничение $0 \leq \hat{\lambda} \leq 1$ ⁵.

Если распределение по режимам проводится детерминированным образом, можно воспользоваться одной из двух основных моделей. Во-первых, детерминированное переключение может производиться в зависимости от индекса наблюдаемой переменной. Например, положим, что (1) выполняется при $i \leq i^*$, а (2) — при $i > i^*$ ⁶. Квандт [136], [137] предложил сначала максимизировать функцию правдоподобия при условии i^* :

$$L(\beta_1, \beta_2, \sigma_1, \sigma_2 | i^*) = (2\pi)^{-n/2} \sigma_1^{-i^*} \sigma_2^{-(n-i^*)} \times \\ \times \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{i=1}^{i^*} (y_i - x_i \beta_1)^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2} \sum_{i=i^*+1}^n (y_i - x_i \beta_2)^2 \right], \quad (5)$$

а после этого выбрать те оценки, которые максимизируют эту условную вероятность по всем i^* . Квандт рекомендует проводить проверку нулевой гипотезы (отсутствие переключения) путем вычисления статистики, соответствующей следующему отношению правдоподобия:

$$\lambda = \frac{\hat{\sigma}_1^{\hat{i}^*} \hat{\sigma}_2^{(n-\hat{i}^*)}}{\hat{\sigma}^2},$$

где $\hat{\sigma}$ есть оценка стандартного отклонения остаточных членов от единой регрессии по всей выборке.

⁵ Рамсей [141, теоремы 1 и 2] показал, что средние квадратичные ошибки оценщиков метода наибольшего правдоподобия с ограничениями или метода «минимального расстояния» с ограничениями будут меньше, чем таковые метода наибольшего правдоподобия без ограничений. Многие авторы (например, Дэй [40]), говоря о простой модели (т. е. где имеется только свободный член), отмечали, что метод Монте-Карло свидетельствует о «вполне разумных» результатах метода наибольшего правдоподобия в случае, когда средние совокупностей далеко отстоят друг от друга, а объемы выборки велики (скажем, от 200 до 1000). Однако результаты, полученные Квандтом с помощью метода Монте-Карло и приведенные в его работе [139], ставят под сомнение приближенную нормальность оценок в случае, когда объем выборки достигает 90. Квандт [139] отмечает, что соответствующая обычному отношению правдоподобия статистика для проверки того, имеет место равенство $\lambda = 0$ или равенство $\lambda = 1$, не распределена по закону «хи-квадрат». Этот последний результат не очень удивителен, поскольку для $\lambda = 0$ или $\lambda = 1$ невозможно построить открытый интервал, содержащий выбранное значение, и, следовательно, стандартные условия регулярности не выполняются (см. [139, с. 94 и 98]). В работе Рамсея [142] говорится об анализе (при малых объемах выборки) случая простой регрессии (свободный член и одна объясняющая переменная), в ходе которого также не удалось подтвердить предположение о приближительной нормальности оценок.

⁶ Имеется один простой случай, который привлек большое внимание специалистов, а именно когда оба режима состоят только из постоянных (но, возможно, различных) членов. Процедуры оценивания и проверки таких изменений можно найти у Пэйджа [123], [124], [125], Чернова и Закса [29], Кандера и Закса [100], Бхатгачари и Джонсона [20], Гарднера [71], Фарли и Хинича [48], Хинкли [92], [94], Сена и Сриваставы [150].

Поскольку i^* не является непрерывной переменной, производная функции правдоподобия по i^* не определена. Тем самым не выполняются стандартные условия регулярности для метода наибольшего правдоподобия и непонятно, какой вид может иметь асимптотическое распределение величины $-2 \ln \lambda$. Возникающие в связи с таким критерием затруднения были отмечены Квандтом [139], а также Фарли, Хиничем и Макгиром [50], [51]. Вместе с тем последние три автора обнаружили, что в одном случае проверка с помощью отношения правдоподобия оказывается полезной, а именно когда индекс i^* находится в начале всего набора индексов или недалеко от его конца. Некоторую пользу приносит и критерий Чоу (если его использовать достаточно аккуратно, как будто значения i^* были априори известны) ⁷.

Для случая $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$ Браун и Дарбин [27] ввели проверку с помощью рекурсивной последовательности остаточных членов. Пусть b_i ($i = k, k+1, \dots, n$) — оценки коэффициентов регрессии, полученные с помощью метода наименьших квадратов на основе первых i наблюдений, и пусть X_i — матрица, строками которой являются векторы x_1, x_2, \dots, x_i . Определим

$$\omega_i = \frac{y_i - x_i b_{i-1}}{[1 + x_i (X'_{i-1} X_{i-1})^{-1} x'_i]^{1/2}} \quad (i = k+1, k+2, \dots, n).$$

Можно показать, что в предположении отсутствия переключения (т.е. $H_0: \beta_1 = \beta_2$) $\omega_i \sim N(0, \sigma^2)$. Определим далее

$$s^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{j=k+1}^n \omega_j^2,$$

$$C_i = \frac{1}{s} \sum_{j=k+1}^i \omega_j \quad (i = k+1, k+2, \dots, n).$$

Гипотезу H_0 можно отвергнуть с уровнем доверия 0,05, если последовательность величин C_i пересекает одну из двух линий: прямую, соединяющую точку $(k; 0,948\sqrt{n-k})$ с точкой $(n; 2,844\sqrt{n-k})$, или прямую, соединяющую точку $(k; -0,948\sqrt{n-k})$ с точкой $(n; -2,844\sqrt{n-k})$ ⁸. К сожалению, как отмечают Фарли, Хинич и Макгир [51, с. 306], эта процедура несостоятельна для трендовых переменных, а также для независимых переменных белого шума.

Основываясь на работе [49], в более поздних работах [50], [51] Фарли, Хинич и Макгир исследовали так называемый «критерий Фарли — Хинича» ($F-H$), используя его для проверки наличия сдвига в величине одного или нескольких угловых коэффициентов в некоторой неизвестной временной точке. Этот критерий базируется на предполо-

⁷ Критерий Чоу был предложен в его работе [31] и позднее рассмотрен Фишером [60]; см. также [113], где имеется обобщение на случай одновременных уравнений.

⁸ Браун и Дарбин [27] предложили также проводить анализ в обратном по времени порядке.

жении, что неизвестная точка переключения может с равной вероятностью совпасть с любым из значений индекса. В частности, они рассматривали модели вида

$$y_i = x_i \beta + z_i \delta + \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где $x_i = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}]$ — вектор-строка, соответствующая i -му наблюдению k фиксированных объясняющих переменных, а $z_i = [z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{ik}]$ — вектор-строка, определяемая так:

$$z_{ij} = z_{ij}(i^*) = \begin{cases} 0, & \text{если } i < i^*; \\ x_{ij}, & \text{если } i \geq i^* \end{cases} \quad (6a)$$

или

$$z_{ij} = z_{ij}(i^*) = \begin{cases} 0, & \text{если } i < i^*; \\ x_{ij} - x_{i^*j}, & \text{если } i \geq i^*, \end{cases} \quad (6б)$$

β и δ — $(k \times 1)$ -векторы коэффициентов регрессии, а $\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n]' \sim N(0, \sigma^2 I)$. Разница между соотношениями (6a) и (6б) состоит в том, что в случае временного тренда (6б) сохраняет непрерывность функции в точке сдвига в отличие от случая (6a).

Фарли и Хинич [49] показали, что соответствующая F — H -критерию статистика для проверки гипотезы $H_0: \delta = 0$ относительно гипотезы $H_1: \delta \neq 0$ может быть построена обычным образом, поскольку при условии справедливости H_0 статистика критерия имеет центральное F -распределение с k и $(n - 2k)$ степенями свободы. Хотя для сдвигов, описываемых формулами (6a) и (6б), этот критерий лишь приближителен, он является равномерно наиболее мощным в том случае, когда альтернатива — линейный непрерывный сдвиг коэффициентов, и, следовательно, он особенно полезен в моделях с систематическим изменением параметра (см. сноску 1).

Фарли, Хинич и Макгир [51] сравнивали многочисленные критерии обнаружения сдвигов типа (6a) и (6б) как в случае, когда величина σ известна, так и тогда, когда σ неизвестна. Здесь мы кратко изложим лишь их результаты, полученные с помощью метода Монте-Карло для модели со свободным членом и двумя объясняющими переменными: трендовым членом и некоторой реализацией равномерно распределенной случайной величины. Используя выборку объемом 60 и разрешая коэффициенту при равномерно распределенной объясняющей переменной иметь сдвиг до шести средних квадратичных отклонений (!), авторы обнаружили, что где-то в средней «половине» списка (а именно при $15 \leq i^* \leq 45$) F — H -критерий является более мощным, чем использующий отношение правдоподобия критерий Квандта (видоизмененный в соответствии с предположениями о гомоскедастичности остаточного члена). Критерий Чоу (в предположении, что «разлом» произошел в средней точке набора индексов) оказался более мощным, чем F — H -критерий, но лишь над небольшой частью середины списка (а именно при $27 \leq i^* \leq 35$). К сожалению, ни один из этих критериев не является достаточно мощным, если выборка мала или сдвиг невелик.

Перейдем ко второму способу задания детерминированного переключения. Оно может производиться не только при переходе индекса наблюдения через некоторое пороговое значение, а определяться и некоторыми другими переменными⁹. Голдфельд и Квандт [74, глава 9] предположили, что существуют переменные, которым отвечают наблюдения $z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{is}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), и что природа осуществляет выбор между режимами № 1 и 2 в соответствии с тем, больше ли нуля выражение

$$\sum_{j=1}^s \pi_j z_{ij}$$

или же оно меньше или равно нулю (π_j — неизвестные коэффициенты)¹⁰. Положим, $D_i = 0$, если

$$\sum_{j=1}^s \pi_j z_{ij} \leq 0, \text{ и } D_i = 1 \text{ в противном случае.}$$

Тогда оба режима можно свести в единую модель

$$y_i = x_i [(1 - D_i) \beta_1 + D_i \beta_2] + (1 - D_i) \varepsilon_{i1} + D_i \varepsilon_{i2} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

в которой оцениванию подлежат β_1, β_2 и величины D_i .

Аппроксимируя D_i значением функции распределения $N(0, \delta^2)$ (в других вариантах функции распределения Коши или логистического распределения) в $\sum_{j=1}^s \pi_j z_{ij}$ и используя метод наибольшего правдоподобия, можно получить оценки для $\beta_1, \beta_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$, величин π_j и для δ^2 . На этом оценивание можно закончить или же перейти ко второму этапу, на котором разделение режимов производится на основе полученных на первом этапе оценок для π_j , причем наблюдения переупорядочиваются так, что

$$\sum_{j=1}^s \pi_j z_{ij} \leq 0 \text{ при } i = 1, 2, \dots, i^*;$$

$$\sum_{j=1}^s \pi_j z_{ij} > 0 \text{ при } i = i^* + 1, i^* + 2, \dots, n,$$

и после чего максимизируется функция правдоподобия (5)¹¹.

Хотя ранее наше внимание было сосредоточено на довольно простых регрессионных моделях с переключением, анализу поддаются (если не на практике, то по крайней мере в теории) и более сложные ва-

⁹ Если добавляется только одна такая переменная, можно расположить наблюдения в порядке возрастания (или убывания) этой переменной, а затем применить только что изложенную методику (основанную на величине индекса наблюдения) без существенных изменений.

¹⁰ Заметим, что это «правило переключения» не имеет вероятностного характера.

¹¹ В другом варианте можно априори фиксировать «меру различия» δ^2 вместо того, чтобы ее оценивать.

рианты. И в этой области первопроходцами были Голдфельд и Квандт¹². Как λ -метод, так и D -метод были обобщены на случай более чем двух режимов. Еще в одном варианте обобщения λ -метода вероятность λ сама рассматривалась как функция некоторых других переменных¹³. В порядке обобщения в другом направлении Голдфельд и Квандт [74, глава 9] ослабили предположение, согласно которому при каждом испытании вероятность λ не зависит от того, в каком режиме находилась система во время предыдущего испытания. Вместо этого они постулировали, что переход системы из одного состояния в другое происходит в соответствии с марковской моделью¹⁴. Кроме того, в различных видоизменениях λ -метода допускалась автокорреляция возмущений¹⁵. Наконец, оба метода переключения режимов (D -метод и λ -метод) обобщались на систему одновременных уравнений таким образом, чтобы связать переключение режимов с различием в направлении причинно-следственных связей¹⁶.

Помимо всех этих обобщений исключительно популярным стало применение общей регрессионной модели с переключением для оценивания неравновесных рыночных состояний. Впервые это было сделано Фэром и Джаффи [46]. В простейшем случае рассматривавшаяся ими модель имела вид (мы опускаем индексы наблюдений):

$$\begin{aligned} Q^D &= D(x^D, p) + \varepsilon_1; \\ Q^S &= S(x^S, p) + \varepsilon_2; \\ Q &= \min(Q^D, Q^S), \end{aligned} \quad (7)$$

где Q^D и Q^S представляют собой ненаблюдаемые величины спроса и предложения, Q есть наблюдаемая величина действительно имевшей место сделки, x^D и x^S — входящие в функции спроса и предложения векторы экзогенных переменных, p — наблюдаемая экзогенная цена, а ε_1 и ε_2 — имеющие двумерное нормальное распределение возмущающие члены, каждый из которых независим от наблюдений¹⁷.

Хотя в первоначальной работе Фэра и Джаффи [46] содержались некоторые серьезные ошибки, тем не менее важность этой работы нашла свое выражение в большом числе вызванных ею дискуссий и идей. Некоторые из проблем, возникающих при рассмотрении различных моделей Фэра и Джаффи, были выявлены самим Фэром и Келеджаном [47], а вслед за ними Амеией [6], Хартли [87], Маллелой [88], Маддалой и Нельсоном [112]. В этих работах обращается внимание на три основные сферы возникновения трудностей, а именно: (1) необходимость тщательного и осторожного выбора адекватной функции правдоподобия, с помощью которой в модели учитывалась бы вся имеющаяся инфор-

¹² Подробно эти вопросы изложены в [75, с. 480—483].

¹³ См. [73].

¹⁴ Подобные обобщения см. в [76] и [177].

¹⁵ См. [73, с. 481—482] и [112].

¹⁶ См. [75, с. 482—483].

¹⁷ Более точное описание модели и предположения о ней см. в [88, с. 2—3]. Фэр и Джаффи [46], а также последующие авторы рассматривали три более сложные модели, в которых изменения цен были сделаны экзогенными. Здесь эти более поздние модели не рассматриваются. Полное описание их см. в [112].

мация, (2) наличие значительных проблем вычислительного характера, связанных с получением оценок метода наибольшего правдоподобия, и (3) невозможность сделать определенные выводы об асимптотических свойствах оценок, полученных методом наибольшего правдоподобия, в связи с тем, что не выполняются стандартные условия регулярности.

Проблема, соответствующая первому из этих пунктов, была, по-видимому, решена перечисленными авторами. Вторая проблема не может быть полностью решена до тех пор, пока не будет исследовано значительно большее число прикладных задач. К сожалению, пока были взяты лишь два набора данных (а именно данные Фэра и Джаффи [46] по рынку жилых домов, использованные позднее Фэром и Келеджаном в [47] и Маддалой и Нельсоном [112], а также данные Сьютса [158] о торговле арбузами, использованные Голдфельдом и Квандтом [77]).

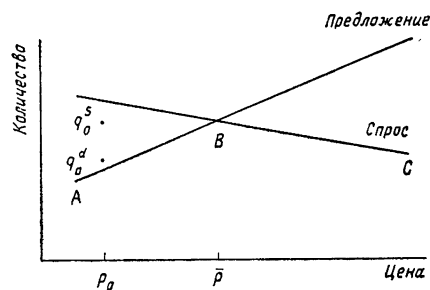


Рис. 7.1. Модель рынка в неравновесном состоянии

В обоих этих случаях возникли серьезные трудности вычислительного характера. Наконец, Хартли и Маллела [88] сделали, по-видимому, большой шаг вперед в решении третьей проблемы, показав в случае простой модели Фэра и Джаффи (7) состоятельность и асимптотическую нормальность оценок метода наибольшего правдоподобия.

Заканчивая обсуждение вопроса о неравновесных состояниях рынка, полезно, вероятно, отметить его связь с рассматриваемыми в следующем разделе сплайновыми регрессионными моделями. Модель (7) графически изображена на рис. 7.1. Учитывая содержащееся в модели (7) условие, состоящее в том, что всегда превалирует «минимальная сторона» рынка *, приходим к выводу, что наблюдения будут группироваться около ломаной ABC. Если бы оба уравнения спроса и предложения не имели вероятностного характера, то модель представляла бы собой просто линейный сплайн с одним неизвестным узлом в точке \bar{p} . При ценах меньше \bar{p} наблюдения реального выпуска попадали бы на кривую предложения, а при значениях цен выше \bar{p} — на кривую спроса. При этом в \bar{p} происходило бы структурное изменение, состоящее в том, что на рынке господствующим фактором переставало бы быть предложение и начинал бы доминировать спрос.

Поскольку, однако, функции спроса и предложения в действительности имеют вероятностный характер, такая аналогия неправомерна.

* Имеется в виду, что в рыночной ситуации покупателей — продавцов всегда доминирует тот физический объем спроса (предложения), которого меньше, т. е. если предложение меньше спроса, то доминируют продавцы, а если спрос меньше предложения, то доминируют покупатели. По-английски это весьма удачно обобщено выражением «the short side of the market always prevails». — *Примеч. ред.*

В самом деле, рассмотрим соответствующую некоторой цене p_0 величину спроса q_0^d и величину предложения q_0^s (эти точки показаны на рис. 7.1). Из рис. 7.1 видно, что величинам q_0^d и q_0^s отвечают положительные и отрицательные остаточные члены соответственно. При этом наблюдаемой величиной будет $q_0 = \min(q_0^d, q_0^s) = q_0^d$. Так что, даже несмотря на то, что $p_0 < \bar{p}$ (и, значит, наблюдаемой «должна» была бы оказаться точка кривой предложения), на самом деле наблюдаемой является точка кривой спроса. Таким образом, вероятностный характер функций спроса и предложения делает процедуру сравнения цены p_0 с \bar{p} в целях определения, какой именно из этих двух функций «принадлежит» наблюдение, практически бесполезной.

7.3. РЕГРЕССИОННЫЕ МОДЕЛИ СО СПЛАЙНАМИ

Сплайновые регрессионные модели представляют собой, по существу, частный случай рассмотренной в предыдущем разделе общей регрессионной модели с переключением. А именно это регрессионные модели с переключением, режимы которых соответствуют соседним интервалам, лежащим на какой-нибудь из осей независимых переменных. При этом на модель накладываются различные условия, обеспечивающие непрерывность, а часто и «гладкость переключения» с одного режима на другой. Эти дополнительные ограничения зачастую не только разумны сами по себе, но и получаемые на их основе функции правдоподобия ведут себя лучше, чем те, которые мы рассматривали в разделе 7.2. Свойства оценок метода наибольшего правдоподобия часто можно исследовать аналитическими методами. В противоположность этому в случае моделей, рассмотренных в разделе 7.2, аналитические доказательства желательных асимптотических свойств фактически отсутствуют вследствие того, что стандартные условия регулярности оказываются неприменимыми¹⁸.

В этом разделе мы будем заниматься различными вариантами классического подхода к проблеме переменных узлов в регрессионных моделях со сплайнами¹⁹. (Байесовский подход будет рассмотрен в разделе 7.4.) В этой области в последние годы наблюдался существенный прогресс, хотя многие вопросы еще и остаются без ответа.

Вообще говоря, процедура минимизации суммы квадратов отклонений путем варьирования узлов часто приводит к отысканию только локальных минимумов, которые тем не менее на практике трудно отличить от глобального минимума. Помимо того математическая природа

¹⁸ Исключением является частный случай регрессионной модели с переключением, рассмотренный Эйгнером, Амемией и Пуарье [4]; см. также работу Хартли и Маллелы [88], касающуюся оценивания неравновесных рыночных состояний.

¹⁹ Следует обратить внимание на работу [179] и раздел 8.5, которые имеют некоторое отношение к рассматриваемым здесь моделям, но в которых интерпретация дается скорее с точки зрения подбора кривых, чем с точки зрения структурных изменений. В работе [179] даются эмпирические правила выбора узлов в модели с кубическим сплайном, а в разделе 8.5 приводятся результаты об оптимальном расположении узлов при аппроксимации многочлена степени $(n + 1)$ многочленом n -й степени.

задачи такова, что чаще применимы итеративные, а не аналитические процедуры. В связи с этим, даже в тех случаях, когда глобальный минимум можно найти за конечное число шагов (см., например, [98]), требуемое число итераций может оказаться очень большим²⁰. К тому же в зависимости от выбора начального расположения узлов можно прийти к различным локальным минимумам [43, с. 15—16]. Далее, зачастую узлы имеют тенденцию стремиться друг к другу, и это указывает на то, что точками разрыва обладает не только n -я производная сплайна n -й степени, но и некоторые другие производные [43, с. 3—4]. Из-за этого обстоятельства решение иногда приходится искать в классе *обобщенных сплайнов* (т. е. в классе сплайнов с дефектом более единицы).

На минуту оставим в стороне статистические соображения и упомянем четыре важные работы, в которых рассматриваются подобные вычислительные проблемы, возникающие при нахождении оптимального расположения узлов. Первые две из них были сделаны исключительно с точки зрения задачи аппроксимации, в них исследуется только случай кубических сплайнов. Пауэлл [134] рассматривал задачу о варьировании узлов в терминах наилучшей аппроксимации сплайнами в метрике L_2 , причем аппроксимируемая функция считалась заданной и не имеющей возмущающего члена. Однако, хотя его результаты и представляют определенный интерес, они не могут быть непосредственно использованы в вычислительной практике, поскольку они касаются непрерывных приближений в метрике L_2 , а не путем минимизации дискретной суммы квадратов. В работах [42] и [43] де Боор и Райс не предполагали, что аппроксимируемая функция задана, а требовали лишь наличия конечного числа наблюдений, на базе которых и строилось указанное трапецеобразное приближение в метрике L_2 ²¹. Их алгоритм можно без большого труда видоизменить таким образом, что с его помощью можно будет минимизировать обычную дискретную сумму квадратов отклонений, которая соответствует процедуре оценивания методом наибольшего правдоподобия в случае нормального распределения ошибок.

В двух других работах вопрос трактуется не с позиций задачи аппроксимации, а с более или менее статистической точки зрения. Хадсон в работе [98] развил алгоритмический подход к задаче нахождения решения методом наименьших квадратов в регрессионной модели с линейным сплайном, который содержит заданное число узлов типа один и типа два²². Как мы уже отмечали, хотя число шагов в этом ал-

²⁰ Для уменьшения требуемого многими алгоритмами числа итераций может оказаться полезной работа [81]; см. также [16], [21] и [110].

²¹ В работах [42] и [43] приведены написанные на Фортране программы, которые реализуют эти алгоритмы.

²² Узел (или, в терминологии Хадсона, точка соединения) называется узлом типа один, если он лежит строго между двумя следующими непосредственно друг за другом точками оси абсцисс, которые соответствуют данным наблюдений, причем коэффициенты наклона по разные стороны от него отличны друг от друга. Узел называется узлом типа два, если он совпадает с одной из точек оси абсцисс, на которые приходится данные наблюдений (независимо от того, равны ли друг другу угловые коэффициенты сегментов, соединяющихся в нем). Наконец, узлом типа три называется такой узел, который лежит строго между

горитме конечно, оно может оказаться весьма большим. Например, в случае если имеется n точек, на которые приходится данные наблюдений, и $(k - 1)$ неизвестных узлов, то количество промежуточных решений равно [98, с. 1120] ²³:

$$\sum_{i=0}^k 2^i C_k^i C_{n-k-2}^i.$$

Когда прямолинейными отрезками являются не все сегменты, приходится рассматривать и возможно имеющиеся узлы типа три. В своей работе [70] Гэллант и Фуллер применили видоизмененный Хартли [85] метод Гаусса — Ньютона и с его помощью получили наилучшее решение (в смысле наименьших квадратов) в случае непрерывной, кусочно-полиномиальной регрессионной модели с заданным числом неизвестных узлов, имеющей при этом непрерывную производную первого порядка. В то время как в работе Хартли [88] для того, чтобы обеспечить сходимость итеративного процесса, требовалась непрерывность второй производной, Гэллант [65] показал, что это условие можно ослабить, и при этом ослабленному условию будет удовлетворять класс моделей, изучавшихся в работе [70].

Что касается статистических вопросов, значительный шаг вперед с точки зрения упрочения статистических основ оценивания с помощью метода наименьших квадратов в случае непрерывной кусочной регрессионной модели общего вида был сделан в недавних работах Федера [53], [54], [55]. Однако, прежде чем перейти к подробному рассмотрению результатов Федера, следует отметить, что в течение последних семнадцати лет эти вопросы рассматривались и многими другими авторами ²⁴. Спрент [156] исследовал случай регрессионной модели с двухсегментным линейным сплайном, причем априори считалось известным, между какой парой наблюдений лежит неизвестный узел \bar{x}_1 (т. е. выполняется неравенство $x_{i^*} \leq \bar{x}_1 \leq x_{i^*+1}$, где значение i^* известно). Он получил статистику отношения правдоподобия для проверки нулевой гипотезы, определяющей положение этого узла (т. е. гипотезы $H_0 : \bar{x}_1 = \bar{x}_1^0$). Робисон [145] обобщил результаты Спрента на случай двух пересекающихся многочленов, но также в предположении, что значения i^* известны. Робисон не требовал, чтобы оценка величины \bar{x}_1 находилась между x_{i^*} и x_{i^*+1} , и допускал, чтобы оценка узла имела комплексные значения. Сильвестер [161] рассматривал двухсегментный линейный сплайн для случая, когда угловой коэффициент второго отрезка равен нулю, он доказал асимптотическую нор-

двумя последовательными точками оси абсцисс, соответствующими данным наблюдений, но при этом коэффициенты наклона с обеих сторон от него равны.

²³ Некоторое улучшение алгоритма Хадсона было предложено Хинкли [91, с. 497—498].

²⁴ Разумеется, в развитии излагаемого здесь подхода сыграли определенную роль исследования, обсуждавшиеся в разделе 7.2, в особенности ранние работы Квандта [136], [137].

мальность оценок метода наибольшего правдоподобия. Несколько позднее Федер [52] рассмотрел ситуацию, когда все отрезки являются многочленами степени d , отличающимися друг от друга лишь в своей линейной части. Это исследование стало прелюдией к его работам [54], [55]. Помимо этого Федер и Сильвестер в кратком резюме [56] сообщили о том, что у них имеются доказательства свойства асимптотической нормальности оценок метода наибольшего правдоподобия для узловых точек.

Гэллант [65], [66] обобщил результаты Маленво [114], [115] и Дженриха [99] и показал состоятельность и асимптотическую нормальность оценок метода наименьших квадратов для тех случаев, когда частные производные второго порядка не всюду непрерывны²⁵. В работах [67] и [68] Гэллант получил также приближения для асимптотического нулевого и ненулевого распределений отношения правдоподобия, дающего в этих моделях критерий проверки гипотез о расположении оценок параметров, а также для случая любой общей регрессионной модели кусочного вида с непрерывной первой производной²⁶.

Наконец, Хинкли [90], [91], [93] подробно рассмотрел двухсегментный линейный сплайн при двух ситуациях — когда все параметры неизвестны и когда второй угловой коэффициент равен нулю (как у Сильвестера [161]). Была показана асимптотическая состоятельность и нормальность оценок метода наибольшего правдоподобия, а также проведено исследование свойств этих оценок для малых выборок (которые будут рассмотрены позднее).

Возвращаясь к результатам Федера, следует отметить две его главные работы, которые не только перекрывают все упомянутые результаты, но и содержат аналитический вывод асимптотических свойств оценок метода наименьших квадратов (или, если остаточные члены имеют нормальное распределение, метода наибольшего правдоподобия), а также аналитический вывод статистики отношения правдоподобия для непрерывной кусочной регрессионной модели общего вида. Мы начнем несколько более подробное изложение с работы Федера [54].

Рассмотрим кусочную функцию регрессии

$$\mu_i = E(y_i | x_i) = \begin{cases} f_1(x_i; \theta_1), & \bar{x}_0 \leq x_i \leq \bar{x}_1 \\ f_2(x_i; \theta_2), & \bar{x}_1 \leq x_i \leq \bar{x}_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_h(x_i; \theta_h), & \bar{x}_{h-1} \leq x_i \leq \bar{x}_h \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (8)$$

²⁵ Гэллант предполагал постоянство объясняющих переменных в повторных выборках. В этих работах оценки были получены нелинейным методом наименьших квадратов с использованием процедуры, описанной Гэллантом и Фуллером в [70].

²⁶ Хотя в работе Гэлланта [69] эти результаты применяются только к моделям с одним узлом, их, по-видимому, можно обобщить и на случай нескольких узлов. Гэллант [69] также показал, как в случае кусочных моделей, для которых производная не всюду определена (т. е. в случае линейного сплайна), можно применять процедуру проверки гипотез и построения доверительных интервалов, предложенную Хартли [80].

удовлетворяющую условиям непрерывности

$$f_j(\bar{x}_j; \theta_j) = f_{j+1}(\bar{x}_j; \theta_{j+1}) \quad (j = 1, 2, \dots, k-1), \quad (9)$$

где $\theta_j = [\theta_{j1}, \theta_{j2}, \dots, \theta_{jI_j}]'$ ($j = 1, 2, \dots, k$) — неизвестные векторы параметров, причем существуют такие известные функции $f_{j1}(x)$, $f_{j2}(x), \dots, f_{jI_j}(x)$, что

$$f_j(x_i; \theta_j) = \sum_{m=1}^{I_j} \theta_{jm} f_{jm}(x_i) \quad (j = 1, 2, \dots, k), \quad (10)$$

где функции f_{jm} ($m = 1, 2, \dots, I_j$) линейно-независимы на отрезке $[\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]$ ²⁷. Предполагается, что внутренние узлы $\tau = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{k-1}]'$ неизвестны, а концевые узлы заданы. При этом без потери общности можно считать, что $\bar{x}_0 = 0$ и $\bar{x}_k = 1$.

Прежде чем перейти к рассмотрению статистической модели Федера, необходимо обсудить проблему идентифицируемости параметров и сформулировать несколько исходных определений.

Определение 7.1. Говорят, что вектор параметров $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k]'$ идентифицирован в $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]'$ с помощью $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]'$, если система уравнений (8) однозначно определяет θ ²⁸.

Пусть $x_i < x_j$. Определим функцию G_n равенством $G_n(x_j) = G_n(x_i) = p/n$, где p — количество наблюдений на отрезке $[x_i, x_j]$. Пусть значения x выбраны таким образом, что $G_n(x)$ сходится по вероятности к $G(x)$ при $n \rightarrow \infty$, причем $G(0) = 0$ и $G(1) = 1$. Перейдем теперь к следующему определению.

Определение 7.2. Центром наблюдений называется точка возрастания функции $G(x)$, т. е. точка «потенциала» данных.

Обозначим через Δ_j множество всех внутренних узлов, удовлетворяющих условиям непрерывности и лежащих справа от тех центров наблюдений, которые однозначно определяют θ_{j+1} . Теперь сформулируем третье и последнее определение.

Определение 7.3. Говорят, что параметр θ хорошо идентифицирован в μ с помощью x тогда и только тогда, когда: (1) θ идентифицирован в μ с помощью x ; (2) для любого j ($1 \leq j \leq k-1$) $\Delta_j = \{x_j\}$.

²⁷ Условие (10) показывает, что на каждом отрезке функция может быть записана в виде линейной комбинации неизвестных параметров. У Федера [54, с. 51] предполагается также, что произвольная любая линейная комбинация функций $\{f_{jm}(x_i)\}$ меняет знак на отрезке $[\bar{x}_0, \bar{x}_k]$ не более чем конечное число раз. Поскольку большинство обычно встречающихся функций (например, многочлены, синусы, косинусы, экспоненты) этому условию удовлетворяют, модель (8) описывает весьма общий случай и включает лишь простое условие непрерывности (9).

²⁸ То обстоятельство, что между каждой парой следующих друг за другом узлов \bar{x}_{j-1} и \bar{x}_j расположено I_j отдельных наблюдений, необходимо и достаточно для идентифицируемости θ . Если n наблюдений находятся на одинаковом расстоянии друг от друга и никакие два соседних сегмента не идентичны, то при достаточности больших значений n существует такое x , что вектор θ будет идентифицирован в μ с помощью x .

Чтобы получить более наглядное представление о вводимых этими тремя определениями понятиях, рассмотрим взятый из работы Федера [54, с. 60] рис. 7.2. На рис. 7.2 (а) показан двухсегментный линейный сплайн, который хорошо идентифицирован четырьмя отмеченными на нем точками. На рис. 7.2. (б) изображен двухсегментный квадратичный сплайн (первый кусок которого представляет собой горизонтальный отрезок), который идентифицирован пятью показанными на нем

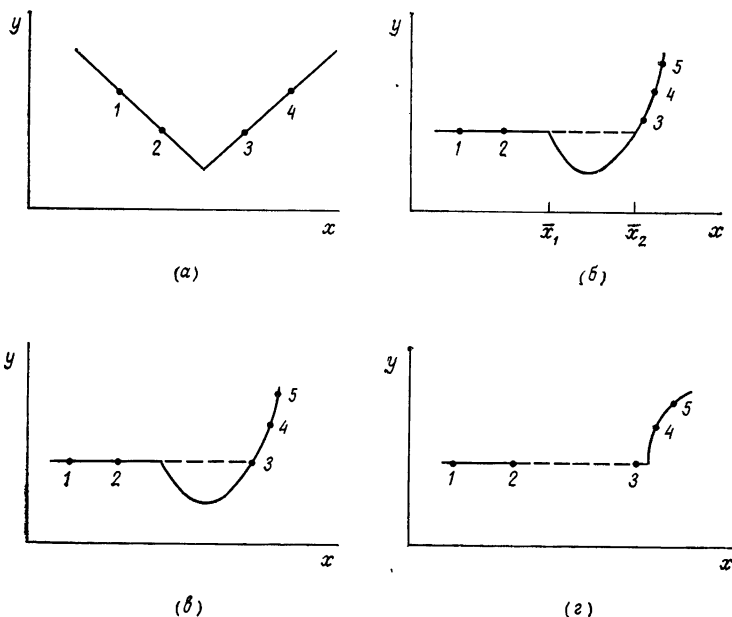


Рис. 7.2. Примеры различных типов идентификации

наблюдениями. Он, однако, *не* является хорошо идентифицированным, поскольку в качестве узла может служить как точка \bar{x}_1 , так и точка \bar{x}_2 . Иначе говоря, хотя наличия пяти наблюдений достаточно для того, чтобы однозначно определить коэффициенты θ_{ji} для каждого из сегментов, тем не менее расположение узлов не определено однозначно. Более того, если немного сместить третье наблюдение (как это показано на рис. 7.2 (в) и (г)), то квадратичный сплайн вообще перестанет быть идентифицированным, так как вид второго куска уже может быть различным (два варианта его показаны на рис. 7.2 (в) и 7.2 (г)), причем третье наблюдение может быть «приписано» к любому из кусков сплайна.

Если модель специфицирована как «вырожденный» линейный сплайн, включающий два идентичных отрезка, то функция регрессии не будет идентифицированной, поскольку существует более чем один отрезок, подсоединяющийся таким образом, что полученная функция тоже будет соответствовать модели. Однако при дополнительном предположении о том, что внутри каждого сегмента имеются по крайней

мере два центра наблюдений, функция будет идентифицирована, но, очевидно, не будет хорошо идентифицирована.

Обсудив вопрос об идентифицируемости параметров, перейдем к определению вероятностного варианта модели (8). Пусть

$$y_i = \left\{ \begin{array}{l} f_1(x_i; \theta_1), \bar{x}_0 \leq x_i \leq \bar{x}_1 \\ f_2(x_i; \theta_2), \bar{x}_1 \leq x_i \leq \bar{x}_2 \\ \vdots \\ f_k(x_i; \theta_k), \bar{x}_{k-1} \leq x_i \leq \bar{x}_k \end{array} \right\} + \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где ε_i — независимые возмущающие члены с нулевым математическим ожиданием и постоянной дисперсией σ^2 , и пусть при некотором $\delta > 0$ $E[|\varepsilon_i|^{2(1+\delta)}] < \infty$. Минимизируя выражение ²⁹

$$SSE(\theta, \tau) = \sum_{i=1}^n [y_i - \mu_i(x_i; \theta)]^2 \quad (11)$$

относительно вектора неизвестных параметров θ , размерность которого есть $q = I_1 + I_2 + \dots + I_k$, и $k-1$ неизвестных узлов τ при выполнении условий непрерывности (8), можно получить соответствующие методу наименьших квадратов оценки $\hat{\theta}$ и $\hat{\tau}$. Если к тому же возмущения нормально распределены, то они являются также и оценками, соответствующими методу наибольшего правдоподобия.

Федер [54, с. 57—58, теорема 3.6] показал, что при условии, что вектор θ идентифицирован в μ с помощью x и что компоненты вектора x являются центрами наблюдений, оценки $\hat{\theta}$ и $\hat{\sigma}^2 = SSE(\hat{\theta}, \tau)/n$ состоятельные для θ и σ^2 соответственно ³⁰. Кроме того, если вектор параметров хорошо идентифицирован в μ с помощью x и компоненты x являются центрами наблюдений, то оценка $\hat{\tau}$ — состоятельная оценка вектора узлов τ ³¹.

При выводе асимптотического распределения величин $\hat{\theta}$ и $\hat{\tau}$ в хорошо идентифицируемом случае Федер, следуя подходу Сильвестера [161], сформулировал «псевдозадачу», опустив все наблюдения, попадающие в интервалы $L_j(n)$ ($j = 1, 2, \dots, k-1$) длиной $d_j(n)$, расположенные вокруг каждой из точек x_j ³². Эти интервалы выбираются таким обра-

²⁹ Федер не касался вопроса о процедуре минимизации выражения (11). В этом отношении крайне важно сохранение порядка узлов. (См. [43, с. 3—4].)

³⁰ Кроме того, необходимо, чтобы оценка $\hat{\theta}$ лежала в сфере с центром θ (см. [54, с. 56, лемма 3.4]. Федер в работе [54, с. 66—67, теорема 3.16] рассматривает также скорость сходимости $\hat{\theta}$ к θ . Оба эти результата (касающиеся состоятельности и скорости сходимости), а также те, которые будут изложены, справедливы и в том случае, когда от оценок требуется, чтобы они попадали в некоторое подмножество пространства параметров (если при этом действительные значения параметра принадлежат замыканию этого множества).

³¹ Скорость сходимости $\hat{\tau}$ к τ (которая помимо всего прочего зависит от порядка дифференцируемости функции регрессии в узлах) дается в работе Федера [54, с. 60, теорема 3.1]. Например, в случае линейного сплайна скорость сходимости для оценки вектора узлов совпадает со скоростью сходимости $\hat{\theta}$.

³² Употребление термина «псевдозадача» отражает тот факт, что значения x_j неизвестны, и, следовательно, такие наблюдения нельзя выкинуть.

зом, что $d_j(n) \rightarrow 0$, но $(n/\ln \ln n)^{(1/2m_j)} d_j(n) \rightarrow \infty$, где m_j есть наименьшее значение порядка производной по x , при котором сегменты f_j и f_{j+1} различаются в точке $x = \bar{x}_j$.

Если распределение величин x_i таково, что при этой процедуре выбрасывается лишь $o(n / [\ln \ln n])$ наблюдений, то «процент утраченной информации» стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ ³³. Поэтому с точки зрения асимптотики выбрасывание наблюдений не отражается на свойствах распределения. Будем обозначать полученное методом наименьших квадратов решение псевдозадачи звездочкой. Федер [54, с. 69—77] показал состоятельность $\hat{\theta}^*$ и $\hat{\tau}^*$ и получил скорость их сходимости к θ и τ . Это сильно упрощает ситуацию, так как асимптотическое распределение $\hat{\theta}$ и $\hat{\tau}$ идентично распределению $\hat{\theta}^*$ и $\hat{\tau}^*$, а последнее легко определить, поскольку оценки псевдозадачи асимптотически ведут себя так, как если бы мы знали, между какими двумя последовательными наблюдениями расположен каждый узел \bar{x}_j ³⁴.

Пусть теперь $D^+(l, j, i)$ и $D^-(l, j, i)$ обозначают соответственно i -ю правую производную и i -ю левую производную функции $f_l(\bar{x}_j; \theta_l)$. Если они совпадают, их общее значение будет обозначаться через $D(l, j, i)$. Пусть Θ есть множество всех значений θ , которые определяют функции, удовлетворяющие условиям непрерывности, Θ — подмножество точек q -мерного пространства, и разница в асимптотическом поведении происходит в зависимости от того, является θ граничной точкой или внутренней точкой Θ ³⁵. В частности, Федер [54, с. 75, теорема 4.13] доказал следующее.

Теорема 7.1. Пусть вектор θ хорошо идентифицирован в μ с помощью x , а компоненты x являются центрами наблюдений³⁶, тогда:

(1) *если θ есть внутренняя точка множества Θ , то $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$ сходится по распределению к $N(0, \Omega^{-1})$, где элемент ω_{ij} , расположенный в i -й строке и j -м столбце матрицы Ω , дается формулой*

$$\omega_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial \mu}{\partial \theta_i} \frac{\partial \mu}{\partial \theta_j} dG(x),$$

где частные производные взяты в точках, соответствующих истинным значениям параметра;

(2) *если θ есть граничная точка Θ и множество $\{\eta - \theta \mid \eta \in \Theta\}$ аппроксимируется выпуклым, положительно-однородным множеством*

³³ Эта гипотеза будет выполнена, если функция распределения величин x непрерывна и в каждом внутреннем узле имеет конечный угловой коэффициент.

³⁴ Отметим сходство псевдозадачи с моделью, рассмотренной Робисоном [145].

³⁵ Федер [54, с. 70, лемма 4.2] показал, что если $D^+(j, j, m_j) = D^-(j, j, m_j)$ и $D^+(j+1, j, m_j) = D^-(j+1, j, m_j)$ при $j = 1, 2, \dots, k-1$, а числа m_1, m_2, \dots, m_{k-1} нечетны, то θ является внутренней точкой Θ . См. примеры 2 и 3 в работе Федера [54, с. 75—80], где приведены случаи, в которых появляются граничные точки.

³⁶ Требуется также, чтобы расстояние между наблюдениями удовлетворяло довольно мягкому, но громоздкому условию около каждого из узлов (см.: Федер [54, с. 61—62, лемма 3.13]).

C , то величина $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$ сходится по распределению к величине $\pi(z)$, где $\pi(z)$ минимизирует выражение $(z - \theta)' \Omega (z - \theta)$ по всем $\theta \in C$, а $z \sim N(0, \Omega^{-1})$ ³⁷.

Теорема 7.1 дает асимптотическое распределение вектора коэффициентов регрессии θ .

Обратимся теперь к вопросу об асимптотическом распределении оценок узлов. Прежде всего введем несколько обозначений. Пусть

$$D^{\pm}(l, j, i) = \begin{cases} D^{+}(l, j, i), & \text{если } \hat{x}_j > \bar{x}_j; \\ D^{-}(l, j, i), & \text{если } \hat{x}_j < \bar{x}_j. \end{cases}$$

Обозначим величину скачка, претерпеваемого m_j -й производной в точке \bar{x}_j , следующим образом:

$$D_j^{\pm} = \frac{1}{m_j!} |D^{\pm}(j+1, j, m_j) - D^{\pm}(j, j, m_j)|.$$

Далее, пусть A есть $(k-1) \times q$ -матрица, (i, j) -й элемент которой равен:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{D_i^{\pm}} \left[\frac{\partial f_i(\bar{x}_i; \theta_i)}{\partial \theta_i} \right] \text{ при } (I_1 + \dots + I_{i-1} + 1) \leq j \leq (I_1 + \dots + I_i), \\ & \frac{-1}{D_i^{\pm}} \left[\frac{\partial f_{i+1}(\bar{x}_j; \theta_{i+1})}{\partial \theta_{i+1}} \right] \text{ при } (I_1 + \dots + I_i + 1) \leq j \leq (I_1 + \dots + I_{i+1}) \end{aligned}$$

и нулю во всех прочих случаях, где $i = 1, 2, \dots, k-1$. В этих обозначениях Федер [54, с. 77, теорема 4.17] доказал следующую теорему.

Теорема 7.2. Пусть выполнены предположения, содержащиеся в условии теоремы 7.1, тогда:

(1) если m_j нечетно и $D_j^{+} = D_j^{-}$ ($j = 1, 2, \dots, k-1$), то

$$\left[\sqrt{n} \left(\hat{x}_1 - \bar{x}_1 \right)^{m_1}, \dots, \sqrt{n} \left(\hat{x}_{k-1} - \bar{x}_{k-1} \right)^{m_{k-1}} \right]$$

сходится по распределению к $N(0, A \Omega^{-1} A')$, где матрица A определена выше³⁸;

(2) если m_i четно, то утверждение пункта (1) настоящей теоремы справедливо, кроме тех случаев, когда $j = i-1, i, i+1$.

Чтобы разобраться в смысле теорем 7.1 и 7.2, рассмотрим простой пример, принадлежащий Федеру [54, с. 77].

³⁷ Множество C положительно-однородно, если из того, что $c \in C$, следует, что для любого $\alpha > 0$ $\alpha c \in C$. Множество ρ аппроксимируется положительно-однородным множеством C , если $\inf_{c \in C} |c - \eta| = o(|\eta|)$ при $\eta \in \rho$, $\eta \rightarrow 0$ и $\inf_{\eta \in \rho} |c - \eta| = o(|c|)$ при $c \in C$, $c \rightarrow 0$.

³⁸ Если m_j нечетно, но $D_j^{+} \neq D_j^{-}$, тогда асимптотическое распределение величины $\sqrt{n}(\hat{x}_j - \bar{x}_j)$ может и не быть нормальным. Тем не менее условие $D_j^{+} = D_j^{-}$ (которое означает, что при продолжении j -го сегмента его m_j -я производная будет непрерывна в окрестности \bar{x}_j) выполняется для большинства обычно используемых функций (например, для многочленов).

Пример 7.1. Рассмотрим состоящий из двух сегментов линейный сплайн

$$\mu_i = \begin{cases} \theta_{11} + \theta_{12} x_i; & 0 \leq x_i \leq \bar{x}_1 \\ \theta_{21} + \theta_{22} x_i, & \bar{x}_1 \leq x_i \leq 1 \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Здесь $k = 2$, $I_1 = I_2 = 2$, $m_1 = 1$, $D_1^+ = D_1^- = \theta_{22} - \theta_{21}$. Если вектор $\theta = [\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22}]'$ хорошо идентифицирован в μ с помощью x , то $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$ сходится по распределению к $N(0, \Omega^{-1})$, где Ω есть следующая (4×4) -матрица:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \int_0^{\bar{x}_1} dG(x) & \int_0^{\bar{x}_1} x dG(x) & 0 & 0 \\ \int_0^{\bar{x}_1} x dG(x) & \int_0^{\bar{x}_1} x^2 dG(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \int_{\bar{x}_1}^1 dG(x) & \int_{\bar{x}_1}^1 x dG(x) \\ 0 & 0 & \int_{\bar{x}_1}^1 x dG(x) & \int_{\bar{x}_1}^1 x^2 dG(x) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Кроме того, $A = 1/(\theta_{22} - \theta_{21}) [1, \bar{x}_1, -1, -\bar{x}_1]$ и $\sqrt{n}(\hat{A} - A)$ сходится по распределению к $N(0, A\Omega^{-1}A')$, где $\hat{A} = (\hat{\theta}_{11} - \hat{\theta}_{21})/(\hat{\theta}_{22} - \hat{\theta}_{12})$.

Однако матрицы Ω и Ω^{-1} можно без труда вычислить не только в этом иллюстративном примере Федера. Они имеют простой вид и в том случае, когда $G(x)$ соответствует равномерному распределению на отрезке $[0, 1]$. Тогда

$$\Omega = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_1^2/2 & 0 & 0 \\ \bar{x}_1^2/2 & \bar{x}_1^3/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \bar{x}_1 & (1 - \bar{x}_1^2)/2 \\ 0 & 0 & (1 - \bar{x}_1^2)/2 & (1 - \bar{x}_1^3)/3 \end{bmatrix};$$

$$\Omega^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{\bar{x}_1} & \frac{-6}{\bar{x}_1^2} & 0 & 0 \\ \frac{-6}{\bar{x}_1^2} & \frac{12}{\bar{x}_1^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_1 + 1)}{(1 - \bar{x}_1)^3} & \frac{-6(1 + \bar{x}_1)}{(1 - \bar{x}_1)^3} \\ 0 & 0 & \frac{-6(1 + \bar{x}_1)}{(1 - \bar{x}_1)^3} & \frac{12}{(1 - \bar{x}_1)^3} \end{bmatrix}$$

$$A\Omega^{-1}A' = \frac{4}{\bar{x}_1(1-\bar{x}_1)(\theta_{22}-\theta_{21})}. \quad (13)$$

Заметим, что, как и следовало ожидать, асимптотическая дисперсия оценки узлов, задаваемая формулой (13), будет минимальной при $\bar{x}_1 = 1/2$ и стремится к бесконечности, когда $\bar{x}_1 \rightarrow 0$, $\bar{x}_1 \rightarrow 1$ или $\theta_{22} \rightarrow \theta_{21}$.

Прежде чем перейти к рассмотрению результатов Федера, которые касаются статистики отношения правдоподобия, остановимся и сделаем несколько замечаний по поводу некоторых вопросов, вызываемых примером 7.1 в связи с общими результатами Федера.

Во-первых, асимптотическая ковариационная матрица θ , т. е. матрица, обратная к (12), имеет «блочно-диагональный» вид. Это говорит о том, что оценки коэффициентов регрессии на различных интервалах не коррелированы друг с другом³⁹. Это вовсе не удивительно, если принять во внимание тот факт, что выражение (11) минимизировалось по θ без всяких ограничений и, следовательно, отдельно для каждого из «сегментов»⁴⁰. Это соответствует теореме 1 Хадсона [98, с. 1103—1105], в которой утверждается, что если точки стыковки являются точками типа один, то общее решение состоит просто из локальных оценок, полученных методом наименьших квадратов, т. е. из оценок, получаемых с использованием лишь той информации, которая относится к данному отрезку⁴¹. С асимптотической точки зрения узлы типа два не играют роли, так как, если вероятность появления соответствующих им точек оси абсцисс равна нулю, отвечающие им результаты наблюдений можно отбросить.

Во-вторых, вполне возможно, что в процессе нахождения узловых точек из условий непрерывности могут появиться бессмысленные «решения». Скажем, полученные в результате оценивания сегменты могут оказаться параллельными, и в этом случае решения вообще не существует; или же если число сегментов превышает два, то полученное «решение» может нарушать порядок расположения узлов (например, может получиться, что $\hat{x}_1 \geq \hat{x}_2$). Как правило, такие противоречия ука-

³⁹ В работах Хинкли [91], [93] используется иная параметризация, которая «автоматически» учитывает условие непрерывности (12) через величины θ . Так что согласно формализации Хинкли неизвестный узел становится явной переменной, по которой проводится оптимизация, в отличие от его неявной роли в формулировке Федера. Разумеется, в случае Хинкли оценки коэффициентов регрессии (с учетом «ограничения») коррелированы друг с другом.

⁴⁰ Термин «сегмент» здесь употребляется весьма произвольно, поскольку его смысл неясен до тех пор, пока мы не вернемся назад и не найдем соответствующие узловым точкам решения (из условий непрерывности), которые и определяют сами сегменты.

⁴¹ Вообще говоря, это не имеет места при наличии дополнительных условий непрерывности, как, например, в случае сплайнов более высокого порядка. Хотя основные результаты Федера касаются кусочных регрессионных моделей, в которых предполагается только непрерывность функциональных значений, в рамках его подхода можно ввести дополнительные условия непрерывности путем наложения тех или иных ограничений на допустимые значения в пространстве параметров (как уже отмечалось в сноске 30).

зывают на то, что была неправильно выбрана исходная спецификация — например, это может означать, что были наложены чересчур жесткие условия непрерывности или же что было введено слишком много узловых точек.

В-третьих, может оказаться, что асимптотически нормальное распределение оценок в случае малых выборок служит плохим приближением. Приводимые в работе Хинкли [93, с. 741—742] результаты выборочного анализа указывают на то, что эти асимптотические распределения для малых выборок ($n = 15$) дают разумное приближение при оценивании параметров регрессии, соответствующих угловым коэффициентам; однако при оценивании параметров, описывающих расположение узловых точек, это не имеет места. Кроме того, с асимптотической точки зрения проверку гипотез и получение доверительных интервалов можно проводить, используя либо эти асимптотические распределения, либо статистику отношения правдоподобия (которую мы сейчас рассмотрим), но неясно, какой из этих способов для конечных выборок мог бы оказаться более точным. По-видимому, оба метода разумным образом согласуются друг с другом в случае линейной сплайновой модели, рассмотренной Хинкли [93, с. 740], а также в случае квадратичной сплайновой модели, рассматривавшейся Гэллантом [69], однако при этом количество соответствующих неизвестному узлу доверительных интервалов, полученных с использованием статистики отношения правдоподобия, может быть больше одного⁴².

Вернемся к изложению результатов Федера, касающихся статистики отношения правдоподобия. Обозначим $\xi = \begin{bmatrix} \theta \\ \tau \end{bmatrix}$ и предположим, что нам необходимо провести проверку гипотезы $H_0 : \xi \in \omega_0$ относительно гипотезы $H_1 : \xi \in \omega_1$, где ω_0 и ω_1 — несвязные подмножества множества Ξ всех возможных векторов θ и совместимых с условиями непрерывности внутренних узлов. По аналогии с обычной теорией проверок с помощью отношения правдоподобия определим $\hat{\xi}_0 = \hat{\xi}_{\omega_0}$, $\hat{\xi}_1 = \hat{\xi}_{\omega_1}$, $\lambda = [\hat{\sigma}(\hat{\xi}_1)/\hat{\sigma}(\hat{\xi}_0)]^{n/2}$. Тогда, как показал Федер [54, с. 87—88, теорема 3.1], если вектор ξ хорошо идентифицирован в μ с помощью x и компоненты x являются центрами наблюдений, то $\hat{\lambda} = \log \lambda^* + o_p(1)$, где λ^* определяется так же, как и λ , но для соответствующей псевдозадачи. Таким образом, $(-2 \ln \lambda)$ и $(-2 \ln \lambda^*)$ имеют одно и то же асимптотическое распределение.

Поскольку внутренние узлы τ являются функциями от θ (через условия непрерывности), пространства гипотез можно эквивалентным образом представить в следующем виде: $H_0 : \theta \in \rho_0$ относительно гипотезы $H_1 : \theta \in \rho_1$, где ρ_0 и ρ_1 — проекции ω_0 и ω_1 на θ -пространство. Федер [54, с. 89—90, теорема 3.2] доказал следующее.

Теорема 7.3. Пусть (1) вектор ξ хорошо идентифицирован в μ с помощью x и компоненты x являются центрами наблюдений, (2) θ есть внутренняя точка множества Θ , которое локально представляет собой

⁴² См.: Х и н к л и [93, с. 738—740]. То же самое происходит при применении метода Хартли [86], как это предложил Гэллант [68, с. 14—15].

q -мерное евклидово пространство, и (3) ρ_0 локально является m -мерным линейным подпространством Θ и пусть ρ_1 есть его дополнение. Тогда асимптотически ⁴³

$$-2 \ln \lambda \sim \chi_{2-m}^2.$$

К сожалению, теорема 7.3 неприменима в том случае, который обычно представляет наибольший интерес. А именно почти всегда при оценивании регрессионной модели кусочного вида целесообразно провести проверку того, действительно ли модель претерпевает то или иное структурное изменение, или, иными словами, нельзя ли в модели обойтись меньшим числом сегментов. Если расположение узлов (точек структурного изменения) известно, то проблема решается просто и методика решения подробно описана в главах 1—6. Если же расположение узлов неизвестно, то в случае нулевой гипотезы (отсутствие структурного изменения) не все параметры регрессии корректно определены, поскольку оцениванию подлежат и потенциально «ложные» узлы ⁴⁴. Тем самым предположения теоремы 7.3 не выполнены ⁴⁵.

С аналогичным положением мы уже встречались в разделе 7.2 при проведении проверки на «отсутствие сдвига» в общей регрессионной модели с переключением. Федер [54, с. 90—96] показал, что в случае двухсегментного линейного сплайна асимптотическое распределение $-2 \ln \lambda$ при выполнении нулевой гипотезы (оба сегмента одинаковы) не совпадает, как можно было бы предположить, с распределением по закону χ_2^2 , а скорее соответствует максимуму из большого числа коррелированных случайных переменных, распределенных по законам χ_1^2 и χ_2^2 ⁴⁶. К сожалению, точный вид корреляционной структуры зависит от разброса наблюдений, и, следовательно, в зависимости от расположения точек независимой переменной могут получаться различные асимптотические распределения. Основываясь на сугубо эмпирических соображениях, Хинкли [90], [91], [93] сообщил, что распределение величины $-2 \ln \lambda$ напоминает χ_3^2 .

Почти что единственный результат, который к тому же можно только наполовину считать рабочим и использовать для сокращения числа сегментов лишь более или менее в качестве эмпирического правила, принадлежит Федеру [54, с. 68]: «... если заданные центры наблюдений лежат внутри соответствующих отрезков и если оценки коэффициентов для двух соседних сегментов (имеющих одинаковый функциональный вид) отличаются друг от друга менее чем на $\log n/n^{1/2}$ или же если оцениваемый сегмент не содержит подходящих непересекающихся подынтервалов, в каждом из которых имеется по крайней мере

⁴³ Федер [54, с. 90] отмечает, что в случае конечных выборок удастся лучше аппроксимировать величину $-2 \ln \lambda$ с помощью центрального F -распределения с $q-m$ и $n-q$ степенями свободы в числителе и знаменателе соответственно.

⁴⁴ Отметим (см., например, уравнение (13)), что в таких случаях дисперсия оценки узлов стремится к бесконечности.

⁴⁵ Несмотря на это, из-за отсутствия лучшей альтернативы теорема 3 или аналогичное ей утверждение все-таки были использованы (см. [70, с. 147]).

⁴⁶ Федер [54, с. 96] отмечает однако, что χ_1^2 ограничивает асимптотическое распределение $-2 \ln \lambda$ снизу.

$n/\log n$ наблюдений, то можно сделать вывод, что два соседних сегмента идентичны».

Можно показать (см. [54, с. 68, следствие 3.22]), что приведенное утверждение справедливо с вероятностью единица при $n \rightarrow \infty$.

7.4. БАЙЕСОВСКИЙ АНАЛИЗ

Как мы уже отмечали, изложенный в разделах 7.2 и 7.3 классический подход игнорирует то обстоятельство, что зачастую в нашем распоряжении имеется некоторая априорная информация, касающаяся структурного изменения, и, хотя такая информация не обязательно является точной, она тем не менее может включать полезные сведения. В этом разделе мы рассматриваем байесовский подход, в рамках которого подобного рода информация может быть учтена в вероятностном виде. Кроме того, байесовские методы не страдают недостатками, присущими функциям правдоподобия (а именно недифференцируемостью или наличием точек разрыва). Поэтому в рамках байесовского подхода многие трудности, с которыми пришлось столкнуться, например, Федеру [54], [55], становятся несущественными.

В работе Своми и Мета [160] развиваются байесовские методы анализа регрессионной модели с переключением вида (1) и (2), причем на дисперсию возмущающего члена в каждом из режимов не накладывается никаких ограничений. В рамках такого подхода не возникает проблем идентифицируемости (даже если одному из режимов соответствует «недостаточное» количество наблюдений) при условии, что информативные (собственные) априорные распределения используются для *всех* параметров⁴⁷. Однако в тех случаях, когда используются неинформативные (несобственные) априорные распределения, возникают и несобственные апостериорные распределения. К сожалению, даже при информативных априорных распределениях соответствующие апостериорные распределения на практике тяжело поддаются анализу (даже для больших выборок), поскольку требуется проводить много операций численного интегрирования. В связи с этим Своми и Мета [160] рекомендовали рассматривать регрессионную модель с переключением не как смесь различных структурных уравнений, а как одно структурное уравнение со случайными коэффициентами.

В работе Феррейры [58] проведен байесовский анализ регрессионной модели с переключением (при условии $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$), в которой переключение производится в зависимости от индекса наблюдения. Используя неинформативные априорные распределения для всех коэффициентов регрессии и считая дисперсию неизвестной, Феррейра избежал проблем идентифицируемости и вырожденности благодаря тому, что он потребовал, чтобы дискретное априорное распределение величины i^*

⁴⁷ На интуитивном уровне тот факт, что байесовский подход не оказывается неудачным, связан с тем, что при его применении мы имеем дело с площадями (т. е. интегралами) под графиком функции правдоподобия, а не только с ее максимумом. Если априорное распределение приписывает нулевые значения плотности величинам $\sigma_1^2 = 0$ и $\sigma_2^2 = 0$, то байесовский анализ можно проводить в окрестности особых точек функции правдоподобия.

(индекс наблюдения, при котором происходит переключение) приписывало нулевую вероятность значениям $p(1)$, $p(n-1)$ и $p(n)$, т. е. ситуациям, в которых какому-нибудь из режимов соответствовало бы только одно наблюдение, и ситуации, в которой второму режиму не соответствовало бы ни одно наблюдение. Отсюда Феррейра смог получить собственные маргинальные апостериорные распределения для всех параметров, включая i^* . Некоторые неполные данные, полученные Феррейрой методом Монте-Карло, указывают на то, что для трех различных априорных распределений i^* (одним из которых является равномерное распределение, использованное Фарли, Хиничем и Макгиром [51]) соответствующая квадратичной функции потерь байесовская точечная оценка (т. е. ближайшее целое число к априорному среднему i^*) в смысле среднего квадратичного отклонения лучше оценки, полученной методом наибольшего правдоподобия.

Гальперн [82] развил байесовский подход для регрессионных моделей со сплайнами, в которых априори задан конечный набор возможных узлов. Результаты Гальперна применимы и тогда, когда относительно положения узлов имеется некоторая неопределенность, при условии, что дискретное распределение, отвечающее конечному набору точек, взято в качестве априорного распределения, соответствующего положению узла. Гальперн также утверждает, что с помощью методики анализа полиномиальной регрессии [83] можно обобщить эти результаты на случай полиномиальной регрессии со сплайнами неизвестной степени и неизвестным порядком дифференцируемости.

Рассмотрим базовую модель Гальперна. Пусть $\bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \dots < \bar{x}_{k-1}$ — возможные узлы и регрессионная модель с линейными сплайнами имеет следующий вид:

$$y_i = \beta_0 \omega_{i0} + \beta_1 \omega_{i1} + \dots + \beta_k \omega_{ik} + \varepsilon_i, \quad (14)$$

где $\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n] \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I})$ и

$$\omega_0 = 1; \quad (15)$$

$$\omega_1 = x_i, \quad (16)$$

$$\omega_j = \begin{cases} x_i - \bar{x}_{j-1}, & \text{если } x_i > \bar{x}_{j-1} \\ 0, & \text{если } x_i \leq \bar{x}_{j-1} \end{cases} \quad (j = 2, 3, \dots, k). \quad (17)$$

Пусть S_1, S_2, \dots, S_K есть $K = 2^{k-1}$ подмножеств множества $\{1, 2, \dots, k-1\}$ и $r(i)$ обозначает число элементов множества S_i . Обозначим расположенные в порядке возрастания элементы множества S_i через $\tau(i, 1), \tau(i, 2), \dots, \tau(i, r(i))$. Далее, пусть H_i ($i = 1, 2, \dots, K$) обозначает нулевую гипотезу, в соответствии с которой реальные узлы (т. е. узлы, которые разделяют два различных отрезка) находятся в точках

$$\bar{x}_{\tau(i, 1)}, \bar{x}_{\tau(i, 2)}, \dots, \bar{x}_{\tau(i, r(i))}.$$

Другими словами, гипотезу H_i можно записать следующим образом:
 $\beta_{j+1} \neq 0$ для тех и только тех значений j , при которых $j \in S_i$.

В случае $i = 0$ гипотеза H_0 описывает ситуацию, когда на всем рассматриваемом промежутке вообще нет узлов, т. е. сплайн состоит всего из одного куска. Если определить

$$\beta_i = \begin{cases} [\beta_0, \beta_1]', & \text{если } r(i) = 0, \\ [\beta_0, \beta_1, \beta_{\tau(i,1)}, \dots, \beta_{\tau(i,r(i))}]', & \text{если } r(i) > 0, \end{cases}$$

то при условии, что H_i справедлива, β_i будет вектором ненулевых коэффициентов в выражении (14). Пусть теперь W представляет собой $n \times (k+1)$ -матрицу вида

$$W = \begin{bmatrix} \omega_{10} & \omega_{11} & \dots & \omega_{1k} \\ \omega_{20} & \omega_{21} & \dots & \omega_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_{n0} & \omega_{n1} & \dots & \omega_{nk} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

где величины ω_{ij} определены формулами (15)—(17). Обозначим также через z_i ($i = 1, 2, \dots, K$) матрицу размерности $(k+1) \times (r(i)+2)$, общий элемент $Z_{il}^{(i)}$ которой определяется как

$$Z_{il}^{(i)} = \begin{cases} 1, & \text{если } j=l=1, y=l=2 \text{ или если } j=\tau(i, l-2)+1; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Вводя теперь $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]'$, мы можем сказать, что модель соответствует гипотезе H_i , если

$$y \sim N(WZ_i \beta_i, \sigma^2 I).$$

Подобно Гальперну мы будем представлять одновременную априорную неопределенность в значениях коэффициентов β_i ($i = 1, 2, \dots, K$) (при заданных H_i и σ^2) с помощью некоторого несобственного равномерного распределения для каждого β_i . Плотность распределения для β_i при заданных H_i и σ^2 будет считаться пропорциональной константе γ_i . Константы $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_K$ необходимы в том случае, если мы рассматриваем несобственное равномерное распределение как предел многомерного нормального распределения при стремлении всех элементов матрицы, обратной к ковариационной, к нулю. Если отождествить обобщенную дисперсию распределения с его неопределенностью и потребовать, чтобы при стремлении к пределу обобщенные дисперсии оставались равными друг другу, то можно показать, что $\gamma_i = (2\pi)^{-r(i)/2}$ ($i = 1, 2, \dots, K$). Априорная неопределенность значения σ при данной H_i описывается величиной $p(\sigma) \sim 1/\sigma$ ⁴⁸.

Вводя необходимые предварительные понятия, мы можем теперь сформулировать следующую теорему Гальперна [82, с. 350—351].

Теорема 7.4. Пусть $m(j)$ ($j = 2, 3, \dots, k-1$) обозначает количество отдельных элементов из набора x_1, x_2, \dots, x_n , которые лежат в промежутке $(\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]$, и пусть $\underline{m}(1)$ и $\underline{m}(k)$ обозначают количество элементов, меньших или равных \bar{x}_1 и больших \bar{x}_{k-1} соответственно.

⁴⁸ См. [82, с. 350] и [83, с. 138]. В работе Гальперна [82] рассматривается также тот случай, когда для коэффициентов β_i и/или для σ^2 используются информативные априорные распределения.

Пусть, далее, $p(H_i)$ ($i = 1, 2, \dots, K$) обозначает априорную вероятность того, что истинное расположение узлов описывается гипотезой H_i . Если априорные распределения β_i и σ^2 при заданной H_i являются неинформативными (несобственными) в только что указанном смысле, то тогда апостериорные распределения будут несобственными при условии, что

$$\min_{1 \leq j \leq k} \{m(j)\} \geq 1, \quad \max_{1 \leq j \leq k} \{m(j)\} > 1 \quad (19)$$

и $n \geq k + 1$. Если апостериорное распределение для β_i является собственным, то оно будет многомерным t -распределением

$$p(\beta_i | y) \sim [v_i s_i^2 + (\hat{\beta}_i - \beta_i)' Z_i' W' W Z_i (\hat{\beta}_i - \beta_i)]^{-n/2}, \quad (20)$$

где $\beta_i = (Z_i' W' W Z_i)^{-1} Z_i' W' y$ есть оценка, полученная с помощью классического метода наименьших квадратов при условии справедливости H_i , $v_i = n - (r(i) + 2)$ — число «степеней свободы», а $s_i^2 = v_i^{-1} (y - W Z_i \hat{\beta}_i)' (y - W Z_i \hat{\beta}_i)$ — обычная оценка дисперсии. Кроме того, в собственном случае апостериорная вероятность $p(H_i | y)$ того, что истинное расположение узлов описывается гипотезой H_i , дается выражением

$$p(H_i | y) \sim \gamma_i p(H_i) (2n)^{-r(i)/2} \Gamma(v_i/2) \left(\frac{1}{2} 2v_i s_i^2\right)^{-v_i/2} (Z_i' W' W Z_i)^{1/2}. \quad (21)$$

Теорема 7.4 содержит все составные части, необходимые при анализе общей линейной сплайновой регрессионной модели, в которой не известно ни число узлов (хотя оно и ограничено известной константой), ни их расположение. Неравенства (19) служат «условиями идентификации», и они похожи на сформулированное в определении 7.3 понятие «хорошей идентифицируемости» Федера. Представленное формулой (21) апостериорное распределение $p(H_i | y)$ можно использовать при решении вопроса о том, какая из моделей является более вероятной⁴⁹. Если теперь фиксировать одну из моделей (скажем, модель, соответствующую гипотезе с самой большой апостериорной вероятностью), то, пользуясь апостериорным распределением $p(\beta_i | y)$ (см. формулу (20)), можно сделать некоторые выводы о регрессионных коэффициентах модели⁵⁰.

⁴⁹ См. пример, приведенный в [83, с. 352—353].

⁵⁰ Заметим, что проверка соседних сегментов на совпадение с помощью величины $p(\beta_i | y)$ кажется на первый взгляд несколько излишней, поскольку в самом выборе гипотезы H_i (с чего мы и начинали) уже содержится предположение, исключающее модели с совпадающими сегментами. Тем не менее в одном случае такая проверка может оказаться полезной. А именно если при помощи $p(\beta_i | y)$ не удается на данном уровне доверия отвергнуть гипотезу о совпадении двух соседних сегментов, это может указывать на то, что, хотя H_i и имеет более высокую апостериорную вероятность, чем гипотеза, соответствующая модели, в которой эти сегменты совпадают, разница этих двух вероятностей не является «существенной».

В работах [82], [83] Гальперн использовал процедуру, в соответствии с которой «оптимальная» модель выбирается на основе минимизации функции потерь, связывающей прогностические свойства модели с тем, насколько хорошо эта модель согласуется со сплайновой формой регрессионной модели⁵¹. Если для нас важны только прогностические свойства, то, вообще говоря, оптимальной моделью будет та, которая учитывает все возможные положения узловых точек. Если же, однако, для нас имеют значение принципы «бритвы Оккама» и правильная спецификация модели, то скорее всего будет выбрана одна из подмоделей с высокой апостериорной вероятностью⁵². Такой подход весьма привлекателен с теоретической точки зрения, поскольку в рамках его можно одновременно изучить как вопрос об адекватности модели (т. е. описывает ли она реальную структуру), так и вопрос о цели построения этой модели (т. е. о прогнозировании будущих значений зависимой переменной). Однако, как и при большинстве байесовских процедур, привлекательность этого подхода для специалистов по прикладным эконометрическим вопросам несколько уменьшается вследствие того, что его использование предполагает спецификацию параметров функции потерь, выбрать которые в лучшем случае довольно трудно⁵³.

Часто встречающимся частным случаем модели Гальперна является тот ее вариант, в котором априори точно известно количество узловых точек. В таких случаях значительно уменьшается число подлежащих рассмотрению гипотез. Предположим, например, что имеется только один узел, возможные значения которого равны x_1, x_2, \dots, x_{k-1} . В таком случае из всех подмножеств множества $\{1, 2, \dots, k-1\}$ имеет смысл рассматривать (т. е. приписывать им положительные вероятности) только те, которые состоят лишь из одного элемента (т. е. те, для которых $r(i) = 1$).

Имеется и другой вариант подхода к рассмотрению таких моделей, который дает возможность использовать непрерывные (в противоположность дискретным) априорные распределения для узловых точек. Этот подход состоит в следующем. Рассмотрим еще раз модель (14), и пусть известно, что имеется ровно $(k-1)$ узловых точек. Тогда функция правдоподобия (при заданных точках наблюдений) имеет вид

$$L(\beta, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}, \sigma) \sim \sigma^{-n} \exp \left[\frac{-1}{2\sigma^2} (\mathbf{y} - \mathbf{W}\beta)' (\mathbf{y} - \mathbf{W}\beta) \right] \sim \\ \sim \sigma^{-n} \exp \left[\frac{-1}{2\sigma^2} \{ \mathbf{v}\mathbf{s}^2 + (\beta - \hat{\beta})' \mathbf{W}' \mathbf{W} (\beta - \hat{\beta}) \} \right], \quad (22)$$

⁵¹ Такой подход напоминает методику Линдли [107].

⁵² См. [82, с. 359], где приводится один такой пример.

⁵³ Мы оставляем читателю решение вопроса о том, являются ли трудности, возникающие при спецификации функции потерь, следствием относительно редкого применения байесовских методов в прикладной эконометрии или же, наоборот, является ли редкое применение байесовских методов в прикладной эконометрии следствием трудностей, возникающих при спецификации функции потерь.

где матрица $\mathbf{W} = \mathbf{W}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1})$ определена формулами (15)–(18), а

$$\beta = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k]';$$

$$\hat{\beta} = \hat{\beta}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}) = (\mathbf{W}' \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}' y;$$

$$v = n - (k + 1);$$

$$s^2 = s^2(\hat{\beta} | \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}) = \frac{1}{v} (y - \mathbf{W}\hat{\beta})' (y - \mathbf{W}\hat{\beta}).$$

Если предположить, что априорная информация, касающаяся σ и узлов $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}$, распределена между этими параметрами независимым образом, а также, что эта информация неинформативна для β и σ , то

$$p(\beta, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}, \sigma) \sim \frac{1}{\sigma} p(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}). \quad (23)$$

Соотношения (22) и (23) дают совместное апостериорное распределение

$$p(\beta, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}, \sigma | y) \sim p(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}) \sigma^{-(n+1)} \times \\ \times \exp \left[\frac{-1}{2\sigma^2} \{ v s^2 + (\beta - \hat{\beta})' \mathbf{W}' \mathbf{W} (\beta - \hat{\beta}) \} \right]. \quad (24)$$

Из (24) следует, что совместные маргинальные распределения для узлов и коэффициентов регрессии даются выражениями

$$p(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1} | y) \sim p(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}) |\mathbf{W}' \mathbf{W}|^{1/2} \times \\ \times [s^2(\hat{\beta} | \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1})]^{-(n-k-1)/2} \quad (25)$$

и

$$p(\beta | y) \sim \int \dots \int p(\beta, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1} | y) d\bar{x}_1, \dots, d\bar{x}_{k-1}, \quad (26)$$

где

$$p(\beta, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1} | y) \sim p(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}) [v s^2 + (\hat{\beta} - \beta)' \mathbf{W}' \mathbf{W} (\hat{\beta} - \beta)]^{-n/2}.$$

Если выполнены условия (19), то все апостериорные распределения (24) — (26) будут собственными. Хотя процедура получения этих апостериорных распределений очень проста, по этому вопросу следует сделать три замечания.

Во-первых, выбор априорного распределения $p(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1})$ должен соответствовать естественному порядку расположения узлов $\bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \dots < \bar{x}_{k-1}$. Вследствие этого априорным распределением не может служить многомерное нормальное распределение, поскольку все переменные, от которых оно зависит, могут принимать произвольные значения из интервала $(-\infty, \infty)$. Напротив, вероятными кандидатами будут многомерное бета- и равномерное распределения. Действительно, области значений, которые может принимать каждая из переменных и которые определяют соответствующие пределы интегрирования в формуле (26), в этих случаях можно варьировать и тем самым привести в соответствие с выбранным порядком расположения узлов.

Во-вторых, анализ выражений (25) — (26) говорит о необходимости применять численные методы интегрирования. Аналитические решения невозможно получить по той причине, что для узловых точек не существует сопряженного априорного распределения. Вследствие этого, даже когда число узлов не превышает трех, возникает возможность появления проблем вычислительного характера.

В-третьих, факт наличия узла можно проверить, используя даваемое функцией (26) выражение для проверки идентичности сегментов. Если гипотезу о том, что два соседних сегмента идентичны, отвергнуть не удается, это может означать, что следует рассмотреть модель с меньшим числом сегментов.

Помимо подхода Гальперна и только что описанного еще один вариант методики был предложен Бэконом и Уоттсом [10]. Хотя авторы и развивали эту методику в рамках байесовской теории (именно поэтому мы и рассматриваем ее в данном разделе), ее можно легко приспособить для использования и в рамках обычного классического метода наибольшего правдоподобия. Метод Бэкона и Уоттса состоит в следующем.

Рассмотрим простую двухсегментную линейную сплайновую регрессионную модель

$$y_i = \begin{cases} \theta_0 + \theta_1 x_i, & x \leq \bar{x}_1 \\ \theta_0 + \theta_1 \bar{x}_1 + \theta_2 (x_i - \bar{x}_1), & x > \bar{x}_1 \end{cases} + \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (27)$$

Будем считать, что возмущающий член (27) ε_i «ведет себя хорошо» и удовлетворяет всем стандартным классическим предположениям. Формулу (27) можно переписать и иначе, выразив y_i через сумму коэффициентов наклона $\alpha_1 = \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2)$ и через их разность $\alpha_2 = \frac{1}{2} (\theta_2 - \theta_1)$:

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 (x_i - \bar{x}_1) + \alpha_2 (x - \bar{x}_1) \operatorname{sgn} (x_i - \bar{x}_1) + \varepsilon_i, \quad (28)$$

где $\alpha_0 = \theta_0 + \theta_1 \bar{x}_1$ и для любого z

$$\operatorname{sgn} (z) = \begin{cases} -1, & z < 0; \\ 0, & z = 0; \\ 1, & z > 0. \end{cases}$$

В формулы (27) и (28) входит линейный сплайн, который описывает происходящее в точке \bar{x}_1 «резкое» изменение коэффициента наклона (при условии, что непрерывность всей модели сохранится). Бэкон и Уоттс [10] предложили рассмотреть более общую модель, в которой возможен (но не обязателен) гладкий переход от одного режима к другому. Они заменили в выражении (28) ступенчатую функцию $\operatorname{sgn} (x_i - \bar{x}_1)$ передаточной функцией $\operatorname{trn} [(x_i - \bar{x}_1)/\gamma]$ ⁵⁴:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 (x_i - \bar{x}_1) + \beta_2 (x_i - \bar{x}_1) \operatorname{trn} [(x_i - \bar{x}_1)/\gamma] + \varepsilon_i. \quad (29)$$

⁵⁴ Эта процедура, в которой используются непрерывные функции, пределом которых (при $\gamma \rightarrow 0$) является ступенчатая функция, похожа на D -метод Голдфельда и Квандта, обсуждавшийся в разделе 7.2.

Бэкон и Уоттс потребовали, чтобы передаточная функция удовлетворяла следующим условиям:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{trn}(|z|/\gamma) = 1; \quad (30)$$

$$\operatorname{trn}(0) = 0; \quad (31)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \operatorname{trn}(z/\gamma) = \operatorname{sgn}(z); \quad (32)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z [\operatorname{trn}(z/\gamma)] = z. \quad (33)$$

Благодаря условию (30) функция $\operatorname{trn}(z/\gamma)$ при больших z ведет себя так же, как $\operatorname{sgn}(z)$, условие (31) обеспечивает равенство $\operatorname{trn}(z/\gamma)$ значению $\operatorname{sgn}(z)$ при $z = 0$, (32) говорит о том, что при малых γ функция $\operatorname{trn}(z/\gamma)$ ведет себя, как $\operatorname{sgn}(z)$, а в соответствии с условием (33) $z [\operatorname{trn}(z/\gamma)]$ при больших z ведет себя, как $z [\operatorname{sgn}(z)] = |z|$ ⁵⁵.

Бэкон и Уоттс интерпретировали величину γ как *масштаб* или *параметр перехода*, поскольку если $\gamma \rightarrow 0$, то согласно условию (32) переход будет «резким», а при $\gamma \rightarrow \infty$ в соответствии с (31) переход будет постепенным⁵⁶. Авторы не придавали большого значения конкретному выбору вида передаточной функции, отметив, что это уже «второй по важности вопрос». Они предложили использовать, например, функцию, описывающую кумулятивное распределение с симметричной плотностью вероятности, или же гиперболический тангенс⁵⁷. Надо надеяться, что будущие эмпирические исследования дадут возможность проводить этот выбор на основе конкретных соображений⁵⁸.

⁵⁵ Например, можно показать, что функция $\operatorname{trn}(z/\gamma) = (2/\pi) \operatorname{arctg}(z/\gamma)$ удовлетворяет условиям (30)–(32), но при этом $\lim_{z \rightarrow \infty} z [\operatorname{trn}(z/\gamma)] = z - \frac{2\gamma}{\pi}$.

⁵⁶ См. также работу Бэкона и Уоттса [10, с. 528], где дается еще одна интерпретация — как «параметр радиуса кривизны».

⁵⁷ См. работу Бэкона и Уоттса [10, с. 527].

⁵⁸ Возникающая здесь при выборе заведомо лучшего варианта передаточной функции неопределенность напоминает проблему выбора между пробитной и логитной спецификациями в моделях с бинарной зависимой переменной. (Пусть семья при определенном уровне дохода либо покупает, либо не покупает автомобиль. Можно представить себе, что вероятности покупки автомобиля при уровне дохода x распределены по нормальному закону, причем p есть вероятность покупки, а $1 - p$ — вероятность отказа от покупки. Пусть $F(y) = p$ есть функция распределения вероятностей. Пробитная спецификация (probit specification) заключается в том, что рассматривается зависимость $y = F^{-1}(p)$, причем предполагается, что переменная y линейно зависит от уровня дохода семьи. Тогда можно записать $F^{-1}(p(x)) = \beta_0 + \beta x$ и $p(x) = F(\beta_0 + \beta x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\beta_0 + \beta x} e^{-t^2/2} dt$, если вероятности покупки распределены по нормальному закону. После построения логарифмической функции правдоподобия

$\sum_{\alpha=1}^{n'} \log p(x_\alpha) + \sum_{\alpha=n'+1}^n \log [1 - p(x_\alpha)]$, где через номера от 1 до n' обозначены группы семей в выборке, купивших автомобиль, а через номера от $n'+1$ до n — не купивших, можно, максимизируя эту функцию, оценить параметры β_0 и β , решая систему нелинейных уравнений.

В логитной спецификации (logit specification) рассматривается выражение $\log \frac{p_\alpha}{1 - p_\alpha} = \beta_0 + \beta \log x_\alpha$, которое иначе называют «логарифмом шансов по-

Хотя оценки неизвестных параметров в уравнении (29) можно получить и методом наибольшего правдоподобия, Бэкон и Уоттс отдают предпочтение байесовскому анализу. Положим $\text{trg}(z/\gamma) = \text{th}(z/\gamma)$ и пусть возмущающие члены $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ и независимы. Тогда функция правдоподобия (при заданных точках наблюдений) имеет вид

$$L(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \bar{x}_1, \gamma, \sigma) \sim \sigma^{-n} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - (x_i - \bar{x}_1) \{\beta_1 + \beta_2 \text{th}[(x_i - \bar{x}_1)/\gamma]\})^2 \right].$$

Если в качестве неинформативного совместного априорного распределения взять

$$p(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \bar{x}_1, \gamma, \sigma) \sim 1/\sigma,$$

то апостериорное распределение будет иметь вид

$$p(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \bar{x}_1, \gamma, \sigma | y) \sim \sigma^{-(n+1)} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} S(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \bar{x}_1, \gamma) \right], \quad (34)$$

где

$$S(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \bar{x}_1, \gamma) = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - (x_i - \bar{x}_1) \{\beta_1 + \beta_2 \text{th}[(x_i - \bar{x}_1)/\gamma]\})^2. \quad (35)$$

При фиксированных \bar{x}_1 и γ правая часть (35) квадратичным образом зависит от $\beta = [\beta_0, \beta_1, \beta_2]'$. А именно

$$S(\beta | \bar{x}_1, \gamma) = S(\hat{\beta} | \bar{x}_1, \gamma) + (\beta - \hat{\beta})' W' W (\beta - \hat{\beta}), \quad (36)$$

где

$$W = W(\bar{x}_1, \gamma) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 - \bar{x}_1 & (x_1 - \bar{x}_1) \text{th}[(x_1 - \bar{x}_1)/\gamma] \\ 1 & x_2 - \bar{x}_1 & (x_2 - \bar{x}_1) \text{th}[(x_2 - \bar{x}_1)/\gamma] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n - \bar{x}_1 & (x_n - \bar{x}_1) \text{th}[(x_n - \bar{x}_1)/\gamma] \end{bmatrix},$$

а $\hat{\beta} = \hat{\beta}(x_1, \gamma) = (W'W)^{-1}W'y$ является оценкой величины β , соответствующей методу наименьших квадратов. Подставляя (36) в (34) и интегрируя по β и σ , можно показать, что

$$p(\bar{x}_1, \gamma | y) \sim |W'W|^{-1/2} [S(\hat{\beta} | x_1, \gamma)]^{-(n-3)/2}. \quad (37)$$

купки». Эта величина изменяется от $-\infty$ при $p = 0$ до ∞ при $p = 1$, причем при $p = 0,5$ она равна 0. После замены вероятностей в левой части этого выражения частотами, взятыми из выборки, параметры β_0 и β оцениваются обычным методом наименьших квадратов. Название объясняется связью с логистической функцией, поскольку $p_{\alpha} = \frac{1}{1 + e^{-\beta_0 - \beta \log x_{\alpha}}} = \frac{1}{1 + e^{-\beta_0} x_{\alpha}^{-\beta}}$. Под-

робнее см.: Theil H. Principles of Econometrics. Amsterdam—London, 1971, p. 628—637. — *Примеч. ред.*

На основании апостериорного распределения (37) можно перейти к формулировке общих выводов, касающихся как положения точки структурного изменения \bar{x}_1 , так и параметра перехода γ ⁵⁹. Особый интерес представляет вопрос о том, содержит ли та или иная маргинальная или совместная область с высокой плотностью вероятности значение $\gamma = 0$. Если значение $\gamma = 0$ не входит в эту область, то это говорит в пользу того, что представление модели с помощью простого линейного сплайна (28) не соответствует действительности и что переход от одного режима к другому в точке $x = \bar{x}_1$ не является «резким». Точный вид перехода будет, конечно, зависеть как от значения γ , так и от вида выбранной передаточной функции.

Помимо этого моделью определяется не только «тип» перехода, но и вид функции, соответствующей каждому сегменту⁶⁰. Если соотношение $\gamma = 0$ не выполняется, то сегменты не являются прямолинейными кусками, хотя асимптотически они и будут приближаться к прямым линиям при удалении точки x от \bar{x}_1 (следствие соотношения (33)).

Бэкон и Уоттс в своей работе [10, с. 530—533] приводят два примера применения их модели в прикладных задачах. Насколько известно автору этой книги, единственное серьезное приложение модели Бэкона — Уоттса в экономике описано в работе Цуруми [166]. Так же как и Бэкон и Уоттс [10, с. 530], Цуруми отмечает [166, с. 10], что $|W'W|^{-1/2}$ не очень сильно меняется и что, следовательно, модальные значения \bar{x}_1 и γ в апостериорном распределении $p(\bar{x}_1, \gamma | y)$ не будут существенно отличаться от оценок, полученных методом наибольшего правдоподобия, если эти модальные значения взять в качестве точечных оценок. Однако такая ситуация не обязательно имеет место, если для \bar{x}_1 и γ используются информативные априорные распределения. В начале этого раздела мы уже отмечали, что разумно, по-видимому, рассчитывать на наличие той или иной априорной информации, касающейся положения точки структурного изменения \bar{x}_1 . К сожалению, прежде чем мы сможем использовать при решении таких задач информативные априорные распределения, соответствующие параметру перехода γ , необходимо гораздо лучше изучить, чем именно различные передаточные функции отличаются друг от друга. Когда такая работа будет проделана, модель Бэкона — Уоттса даст специалистам возможность учитывать в вероятностной форме априорную информацию, касающуюся как вида структурного изменения, так и расположения соответствующих ему точек.

Разумеется, при использовании информативных априорных распределений мы не сможем аналитически вывести апостериорные рас-

⁵⁹ Прежде чем перейти к выводам относительно β , уравнение (37) надо проинтегрировать по \bar{x}_1 , γ и σ , чтобы получить апостериорное распределение $p(\beta | y)$. После этого, интегрируя по β_0 и β_1 можно получить апостериорное распределение $p(\beta_2 | y)$. Если гипотезу $\beta_2 = 0$ не удастся отвергнуть, это может означать, что два наших сегмента идентичны.

⁶⁰ Разумеется, оба эти утверждения сильно зависят от выбора передаточной функции. С этой точки зрения модель Бэкона — Уоттса напоминает преобразование Бокса — Кокса [25].

пределения $p(\bar{x}_1, \gamma | y)$ (как это было сделано в уравнении (37)). Подобные проблемы возникнут и при вычислении $p(\beta | y)$ и $p(x_1, y)$. Это означает, что в модели Бэкона — Уоттса имеются большие возможности для появления серьезных проблем вычислительного характера, связанных с численным интегрированием⁶¹. Цуруми [166] предложил брать модальные значения $p(x_1\gamma | y)$ для \bar{x}_1 и γ , а затем производить оценивание модели, применяя обычный метод наименьших квадратов.

7.5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Любая попытка кратко изложить уже и без того длинный обзор наверняка окажется бесплодной. Тем не менее все-таки стоит сделать несколько замечаний, которые касаются вопросов, характерных почти для всех рассмотренных моделей, и которые могут оказаться полезными в будущих исследованиях.

Во-первых, и это, по-видимому, самое важное, классический подход к проблеме оценивания параметров, описывающих положение неизвестных точек переключения (или узлов), и классические методы проверки наличия изменения при переходе от одного режима (или сегмента) к другому почти наверняка приведут к неудаче, поскольку при условии справедливости нулевой гипотезы (отсутствия изменения параметра) неизвестная точка переключения (или узел) не поддается идентификации. Кроме того, как мы видели в разделе 7.2, сама процедура оценивания с помощью классических методов приводит к не очень хорошим результатам. В случае сплайновой регрессии Федеру [54], [55] удалось ответить на все вопросы, кроме вопроса о проверке отсутствия структурного изменения, а, к сожалению, именно этот вопрос часто представляет самый большой интерес.

Во-вторых, применение в процессе оценивания и проверки гипотез байесовских методов приводит к успеху (если не на практике, то по крайней мере в теории) при условии, что исходная модель идентифицирована — обычно с помощью информативных априорных распределений. Стоит, по-видимому, еще раз отметить, что трудно себе представить такое положение, когда при переходе от обычных моделей с известными точками структурных изменений к моделям с неизвестными точками структурных изменений у исследователя нет хоть какой-нибудь (в особенности относящейся к тому, что именно ему могут говорить результаты наблюдений) априорной информации, касающейся положения точек структурного изменения. Байесовский анализ не только предоставляет нам удобную схему, в рамках которой можно учитывать эту априорную информацию, но и дает возможность делать это в вероятностных терминах.

⁶¹ Однако никогда не возникает необходимости проводить более двух численных интегрирований, поскольку лишь два параметра (\bar{x}_1 и γ) входят в нашу функцию нелинейным образом. Например, чтобы найти $p(\beta_2 | y)$, следует аналитическими методами найти интеграл по β_0 и β_1 , а затем численными методами проинтегрировать по \bar{x}_1 и γ .

В-третьих, возникающие при применении байесовских методов трудности, связанные с численным интегрированием, не являются, по-видимому, более серьезными, чем проблемы вычислительного характера, с которыми часто приходится сталкиваться при классических методах. Так в случае сплайновой регрессии, применяя классический подход, трудно следить за порядком расположения узловых точек. В то же время с помощью байесовской методики эта проблема решается несколько проще за счет выбора области изменения параметров, по которым проводится интегрирование. В тех случаях, когда информация о положении неизвестных узлов дается некоторым дискретным априорным распределением, что вполне разумно для тех случаев, когда соответствующие данным переменные обычно принимают целые значения (например, возраст, образование, время), проблем вычислительного характера будет еще меньше.

В-четвертых, все обсуждавшиеся нами проблемы вычислительного и статистического характера будут нагромождаться одна на другую, когда мы перейдем к рассмотрению более сложных моделей, реально применяемых в эконометрическом анализе. На практике исследователю придется столкнуться с дополнительными объясняющими переменными, необходимостью обобщения на случай более чем двух режимов, или сегментов, более сложным видом возмущающих членов. Все это почти неизбежно в тех приложениях, где используются временные ряды. Можно высказать предположение, что если учесть все эти обстоятельства, то они вряд ли изменят большую часть полученных результатов. Тем не менее разумно все-таки ожидать, что практическое применение таких моделей станет еще более трудным.

Наконец, в-пятых, даже когда для одной из рассмотренных классических моделей (например, у Федерера [54], [55]) и имеются конкретные результаты, касающиеся вида распределения, они носят асимптотический характер. При этом данные, полученные методом Монте-Карло, указывают на то, что эти асимптотические результаты дают плохое приближение для выборочного распределения, которое соответствует относительно малым выборкам, используемым в эконометрии. С другой стороны, хотя байесовские апостериорные распределения для рассматривавшихся моделей почти никогда не имеют простого известного вида, они по крайней мере являются точными результатами для конечных выборок.

8.1. ВВЕДЕНИЕ

В первых семи главах этой книги наше внимание было сосредоточено на довольно простых моделях структурных изменений, в которых использовались определенные, специального вида сплайн-функции. Модели, с которыми приходится сталкиваться на практике, чаще всего бывают более сложными, вследствие чего применять сплайн-функции часто оказывается не так просто. В этой короткой главе мы хотим обратить внимание на несколько вопросов, которые возникают при анализе таких моделей. А именно, прежде чем перейти к последней главе, которая касается структурных изменений функции потерь, мы обсудим следующие вопросы: (1) различные виды параметризации, (2) точная мультиколлинеарность, (3) изменение параметров во времени, (4) выбор расположения узлов и (5) программы для ЭВМ, облегчающие анализ модели.

8.2. РАЗЛИЧНЫЕ ВАРИАНТЫ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ

В настоящее время существует несколько способов задания сплайн-функций. Основной из них — обобщение на случай сплайна произвольного порядка представления (3) из главы 2, с помощью которого там был параметризован линейный сплайн. В общем случае полиномиальный сплайн n -го порядка $S(x)$ с внутренними узлами в точках $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{k-1}$ можно записать в виде

$$S(x) = \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j (x - \bar{x}_j)_+^n + \beta_k + \beta_{k+1}x + \dots + \beta_{k+n}x^n, \quad (1)$$

где элементарные сплайн-функции

$$(x - \bar{x}_j)_+^n = \begin{cases} (x - \bar{x}_j)^n, & \text{если } x > \bar{x}_j \\ 0, & \text{если } x \leq \bar{x}_j \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, k-1) \quad (2)$$

называются также *B-сплайнами* (basic splines), а величины β_j ($j = 1, 2, \dots, k+n$) — коэффициенты регрессии. Поскольку n -я производная каждого из *B-сплайнов* претерпевает разрыв в точке \bar{x}_j , с их помощью можно включить необходимое число таких точек разрыва в область определения $S(x)$. Если представляется целесообразным, чтобы в точке x_j разрыв претерпевала производная меньшего порядка, скажем по-

рядка m , то этого легко добиться, добавив к правой части (1) член, содержащий $(x - \bar{x}_j)^m$.

Представление (1) особенно удобно для проверки гипотезы о наличии структурного изменения, скажем, в точке \bar{x}_j , так как два сегмента имеют различный вид, если $\beta_j \neq 0$. С другой стороны, выражение (1) имеет тот недостаток, что в случае, когда число узлов или порядок сплайна велики, получается очень плохо обусловленная матрица наблюдений за объясняющими переменными. Поэтому с вычислительной точки зрения более предпочтительно представление сплайна с помощью его значений в узловых точках, как это было сделано в формуле (1) из главы 2 в случае линейного сплайна и в формуле (14) из главы 3 для кубического сплайна. Далее, представление (1) зависит от $(k + n)$ параметров. В главе 3 мы видели, что в случае кубического сплайна ($n = 3$) с k сегментами требуется только $(k + 1)$ параметров. Причина уменьшения числа параметров на два в том, что в главе 3 были добавлены граничные условия — в конечных узлах \bar{x}_0 и \bar{x}_k . В случае представления (1) никаких граничных условий наложено не было.

Обычно окончательный выбор типа параметризации — в виде (1) или с помощью задания значений сплайна во внутренних узлах — производится в зависимости от целей оценивания. Как мы уже отметили, проверку гипотез о наличии структурного изменения можно проводить и в том и в другом варианте, но в случае (1) она проводится намного проще. Однако иногда целесообразнее провести непосредственное оценивание значений ординат в узловых точках с тем, чтобы облегчить проверку того, обращается ли сплайн в каком-либо из узлов в нуль. Примеры такого рода можно найти в работах [133], [170], [171].

Еще одно преимущество представления (1) состоит в том, что у записанного в таком виде сплайна легко изменять количество узлов, добавляя или выбрасывая члены, содержащие соответствующий B -сплайн (2). Если же сплайн задан его значениями в узлах, то увеличение или уменьшение числа узлов требует пересчета всех преобразованных регрессионных переменных.

8.3. ТОЧНАЯ МУЛЬТИКОЛЛИНЕАРНОСТЬ

До сих пор наше внимание было сосредоточено на таких задачах, в которых зависимая переменная была функцией только одной объясняющей переменной. Тем не менее, как мы видели в разделе 2.2, в регрессионную модель со сплайнами, точно так же как и в любую другую модель множественной регрессии, можно включить и другие объясняющие переменные. Так, например, в работах [133], [170] и [171] сплайны используются в уравнении регрессии наряду со многими другими переменными, причем некоторые из этих других переменных тоже были представлены сплайном или с помощью простого взаимодействия со сплайнами.

В подобных случаях следует проявлять осторожность с тем, чтобы не допустить появления в модели точной мультиколлинеарности, поскольку эти сплайны явно или неявно содержат свободные члены. На-

пример, при представлении с помощью значений в узлах свободные члены входят в сплайны неявным образом, в чем можно убедиться, рассмотрев преобразованную матрицу наблюдений за объясняющими переменными \mathbf{W} , задаваемую формулой (14) главы 3. Обозначая через \mathbf{t} вектор-столбец, состоящий из $(k \times 1)$ единиц, легко видеть, что

$$\mathbf{Wt} = (\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{\Theta} + \mathbf{Q})\mathbf{t} = \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{\Theta}\mathbf{t}) + \mathbf{Q}\mathbf{t} = \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{0} + \mathbf{t} = \mathbf{t}.$$

Таким образом, сумма столбцов \mathbf{W} равна столбцу из единиц, откуда и следует, что в них неявно содержится свободный член. Это имеет место для всех граничных условий, рассмотренных в разделе 3.8, за исключением тех ситуаций, когда требуется, чтобы график сплайна проходил через начало координат, в случае чего неявный свободный член пропадает. Аналогично можно убедиться, что и в случае периодического кубического сплайна для преобразованной матрицы регрессии $\tilde{\mathbf{W}}$, даваемой формулой (39) главы 3, справедливо соотношение $\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{t} = \mathbf{t}$.

Иллюстрацию этих результатов и следствия из них можно найти в работе Уоттса [170]. Уоттс использовал в своей модели естественный кубический сплайн, зависящий от временного параметра, с узлами в точках, соответствующих 0, 16, 32 и 48 месяцам. Так как его модель уже и без того содержала свободный член, Уоттс устранил свободный член, неявно входивший в зависящий от времени естественный кубический сплайн, опустив соответствующую нулевому моменту времени (или, что эквивалентно, любому другому узлу) преобразованную переменную. Это равносильно наложению ограничения, состоящего в том, чтобы в нуле сплайн обращался в нуль (разумеется, еще один свободный член имеется среди всех прочих переменных модели). Кроме того, Уоттс наложил на этот временной тренд периодический кубический сплайн с узлами в точках, соответствующих 0, 3, 6, 9 и 12 месяцам. Так как по определению 3.2 значения периодического кубического сплайна в узлах 0 и 12 должны быть равны друг другу, оцениванию подлежат лишь его значения в точках, скажем, 0, 3, 6 и 9. Кроме того, учитывая, что $\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{t} = \mathbf{t}$, необходимо также опустить одну из преобразованных переменных, соответствующую какому-нибудь из остающихся узлов, скажем нулевому узлу. Тогда остается оценить лишь значения сплайна в точках 3, 6 и 9.

8.4. МОДЕЛИ С ПАРАМЕТРАМИ, ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ВО ВРЕМЕНИ

Как мы уже упоминали в разделе 7.1, в последнее время значительное внимание уделяется моделям с параметрами, систематически изменяющимися в зависимости от времени¹. Некоторые авторы даже предпочитают называть именно такое изменение во времени «структурным изменением». Мы, однако, применяем этот термин только к тем моделям, в которых значения параметра изменяются лишь «небольшое» число раз. В моделях с переменными по времени параметрами

¹ См. например, [17], [18], [19], [36], [38] и др.

обычно требуется, чтобы эти параметры либо изменялись в зависимости от времени непрерывным образом, либо не изменялись вообще. В противоположность этому в моделях, которые мы рассмотрим в данном разделе, параметрам будет разрешено изменяться на некоторых промежутках временного интервала и оставаться постоянными на других. Примерами моделей такого типа могут служить модели с переменным свободным членом, рассматривавшиеся нами в разделах 2.2 и 3.7, а также модели со сплайновым запаздыванием, рассмотренные в главе 6. В этом разделе мы займемся построением более общих моделей такого вида, разрешив всем угловым коэффициентам изменяться во времени.

Рассмотрим, следуя Белсли [17], регрессионную модель

$$y_t = \mathbf{X}_t \boldsymbol{\beta}_t + \varepsilon_t \quad (t = 1, 2, \dots, T), \quad (3)$$

где \mathbf{X}_t есть k -мерная вектор-строка фиксированных объясняющих переменных, $\boldsymbol{\beta}_t$ — k -мерный вектор-столбец параметров, изменяющихся во времени, и $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T]'$ — вектор возмущающих членов, причем $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I})^2$.

Предположим, что изменение коэффициентов во времени можно описать следующим образом:

$$\boldsymbol{\beta}_t = \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{z}_t + \mathbf{u}_t \quad (t = 1, 2, \dots, T), \quad (4)$$

где \mathbf{z}_t есть m -мерный вектор-столбец фиксированных переменных (среди которых могут быть и некоторые объясняющие переменные нашей регрессии), $\boldsymbol{\Gamma}$ — постоянная матрица размерности $k \times m$ и $\mathbf{u}_t = [u_{1t}, u_{2t}, \dots, u_{kt}]'$ — вектор возмущающих членов, распределенных независимо от $\boldsymbol{\varepsilon}$ и таких, что $\mathbf{u}_t \sim N(0, \sigma_u^2 \boldsymbol{\Omega})$ ($t = 1, 2, \dots, T$). Подставляя теперь (4) в уравнение (3), получаем

$$y_t = \mathbf{X}_t \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{z}_t + (\mathbf{X}_t \mathbf{u}_t + \varepsilon_t) = (\mathbf{X}_t \otimes \mathbf{z}_t') \boldsymbol{\Lambda} + \eta_t \equiv \mathbf{W}_t \boldsymbol{\Lambda} + \eta_t, \quad (5)$$

где

$$\eta_t = \mathbf{X}_t \mathbf{u}_t + \varepsilon_t;$$

$$E(\eta_t) = 0; \quad \text{var}(\eta_t) = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_u^2 \mathbf{X}_t \boldsymbol{\Omega} \mathbf{X}_t';$$

$$\text{cov}(\eta_t, \eta_s) = 0; \quad t \neq s$$

и

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{bmatrix} \quad (\gamma_i \text{ есть } i\text{-й столбец } \boldsymbol{\Gamma}).$$

Обозначим через \mathbf{W} матрицу размерности $T \times (km)$, t -я строка которой определяется соотношением $\mathbf{W}_t = \mathbf{X}_t \otimes \mathbf{z}_t'$, и предположим, что ранг \mathbf{W} равен km . Если $\sigma_u^2 = 0$, то к уравнению (5) можно применить обычный метод наименьших квадратов и получить оценку

$$\hat{\boldsymbol{\Lambda}} = (\mathbf{W}' \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}' \mathbf{y}.$$

² Для простоты мы в уравнении (3) абстрагируемся от проблем автокорреляции рядов.

Однако если $\sigma_u^2 \neq 0$, то эта процедура не дает эффективных оценок (хотя они и будут несмещенными и состоятельными), так как она не принимает во внимание гетероскедастический характер η_t . В случае, когда матрица Ω известна, можно, по-видимому, воспользоваться обобщением процедуры, приведенной в книге Тейла [164, с. 622—625] для простой регрессии, хотя, вероятнее всего, такое обобщение и будет довольно сложным. Случай, когда матрица Ω неизвестна, тоже может оказаться поддающимся анализу, но им, по-видимому, еще никто не занимался³.

Как бы то ни было, вопросы оценивания, хотя они и важны, не являются главной темой этого раздела. Нас скорее интересует вопрос о том, каким образом можно специфицировать зависимость β_t от времени. Опустим для простоты все прочие экзогенные переменные; предположим, что коэффициенты β_t можно представить просто как функцию от времени и рассмотрим следующий упрощенный вариант модели (3) и (4):

$$y_t = [1 \ x_t] \begin{bmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \end{bmatrix} + \varepsilon_t \quad (t = 1, 2, \dots, T); \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ (t - \bar{t}_1)_+ \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Уравнения (6) и (7) соответствуют модели (3) и (4) в том случае, когда $k = 2$ и $m = 3$, причем свободный член не зависит от времени, а коэффициент наклона является зависящим от времени линейным сплайном с неизвестным узлом в точке \bar{t}_1 . Подставляя (7) в уравнение (6), получаем частный случай уравнения (5):

$$y_t = \alpha + \gamma_{21} x_t + \gamma_{22} (x_t t) + \gamma_{23} [x_t (t - \bar{t}_1)_+] + \varepsilon_t. \quad (8)$$

С помощью параметров уравнения (8) сформулируем несколько нулевых гипотез, проверка которых может представлять интерес для данной модели:

$$H_0 : \gamma_{21} = \gamma_{22} = \gamma_{23} = 0; \quad (9)$$

$$H_0 : \gamma_{22} = \gamma_{23} = 0; \quad (10)$$

$$H_0 : \gamma_{23} = 0; \quad (11)$$

$$H_0 : \gamma_{22} + \gamma_{23} = 0. \quad (12)$$

Нулевая гипотеза (9) соответствует проверке того, оказывает ли объясняющая переменная x какое бы то ни было влияние на y ; с помощью гипотезы (10) проверяется, не будет ли угловой коэффициент постоянным по времени; гипотеза (11) дает проверку того, не является ли угловой коэффициент просто линейной функцией от времени, а гипотеза (12) осуществляет проверку следующего предположения: не будет ли угловой коэффициент константой при $t \geq \bar{t}_1$ и линейной функцией

³ Белсли [17, с. 488—489] считает, что предположение $\sigma_u^2 = 0$ разумно во многих эконометрических моделях.

времени при $t < \bar{t}_i$. Последние три критерия напоминают рассмотренный нами в главе 7 критерий Фарли — Хинича. Однако в отличие от формулировки Фарли — Хинича использование линейного сплайна дает угловому коэффициенту возможность изменяться на одном интервале и быть постоянным на другом ⁴. При этом разумно, по-видимому, ожидать, что подобные критерии будут иметь такую же «робастность», как и критерий Фарли — Хинича.

Хотя уравнение (8) — явно упрощенный вариант уравнения (5), оно сохраняет большую часть существенных черт последнего. При этом ясно, что уравнение (8) можно обобщать в нескольких направлениях. Во-первых, изменение параметра можно описывать сплайном более высокого порядка, например кубическим ⁵. Во-вторых, добавляя дополнительные узлы, можно включить в описание *траектории движения коэффициентов во времени* не одну, а несколько точек структурного изменения ⁶. В-третьих, можно разрешить более чем одному коэффициенту изменяться во времени ⁷. В-четвертых, хотя такой вариант подхода еще и не был опробован, рассмотренную в главе 7 методику можно обобщить на случай уравнения (5), что даст возможность провести оценивание положения точек структурного изменения. В-пятых, методы, рассмотренные Белсли в [17], [18], [19] для тех случаев, когда неясно, какие из переменных z_t лучше подходят для объяснения изменений коэффициентов, а также для тех случаев, когда число km «велико», можно непосредственным образом обобщить на рассматриваемые здесь модели. Наконец, в-шестых, можно, пользуясь обычными методами, учесть наличие автокорреляции возмущающих членов ε_t — во всяком случае, для тех моделей, в которых зависимость параметра от времени не носит вероятностного характера.

8.5. ВЫБОР РАСПОЛОЖЕНИЯ УЗЛОВ

Помимо рассмотренных нами в главе 7 имеются и другие варианты подхода к выбору узловых точек, хотя они обычно и рассматриваются скорее с точки зрения подбора кривых. В частности, специалистами, работающими в области естественных или технических наук, было выработано очень много различных эмпирических правил выбора расположения узлов. Эти правила большей частью основываются на приложениях к задачам, в которых данные наблюдений имеют «гладкий» характер и включают лишь небольшой «шум» (или вообще не содержат возмущающих членов). Тем не менее они могут оказаться полезными и исследователю, который работает с данными, обычно встречающимися в общественных науках. Наличие таких правил весьма ценно с той точки зрения, что они могут помочь специалисту сформулировать некоторые априорные представления о том, где должны располагаться узлы. Однако, с другой стороны, существование таких правил может

⁴ Вспомним рис. 2.4.

⁵ См. пример в работе Уотса [171].

⁶ См. пример в работе Эври [9].

⁷ Т а м ж е.

толкнуть кое-кого на применение метода «рыбной ловли», и с этой точки зрения их популярность нельзя очень уж приветствовать.

Уолд [179] кратко изложил свой большой опыт работы со сплайн-функциями в областях, связанных с химией⁸. Относительно выбора узлов он пишет: «С моей точки зрения, выбор расположения узлов очень напоминает выбор вида функции в обычной задаче о подборе кривой. В этом втором случае вид функции *не* считается параметром... Я предлагаю относиться к узлам сплайн-функций не как к обычным свободным параметрам, а рассматривать их спецификацию аналогично выбору вида функции. В соответствии с этим при выборе узлов следует учитывать общий характер поведения данных (количество точек, положение максимумов и минимумов и т. д.)».

Основываясь на этих соображениях, Уолд формулирует далее четыре эмпирических правила, которым целесообразно следовать, работая с кубическими сплайнами:

1. «Выбирайте как можно меньше узлов — так, чтобы на каждом интервале было не меньше четырех-пяти наблюдений. Это правило соответствует стремлению по возможности уменьшить число параметров. В случае сплайн-функций в этом отношении нужно проявлять особую осторожность, поскольку большая гибкость этой функциональной формы легко может дать излишнее приближение (*overfitting*) к выборке».

2. «Следите за тем, чтобы на каждом интервале было не более одной точки экстремума (максимума *или* минимума) и не более одной точки перегиба. Это обусловлено тем фактом, что над каждым интервалом сплайн представляет собой кусок кубической параболы, которая не может отразить более сложный тип изменений».

3. «Добивайтесь того, чтобы точки экстремума находились в середине интервалов».

4. «Помещайте точки перегиба ближе к узлам».

Эти правила ни в коем случае не следует считать абсолютно жесткими, но наряду с имеющейся, возможно, априорной информацией их вполне можно применять для выбора расположения узлов. Подтверждением этому служит рассмотренный нами в разделе 6.5 пример сплайнового запаздывания. Однако существует один случай, когда возможно однозначное аналитическое решение. Конечно, он относится к задаче очень частного характера, но полученный результат имеет аналитическую природу, что само по себе производит довольно сильное впечатление в сравнении с эмпирическим правилом Уолда и методикой, рассмотренной в главе 7, и поэтому заслуживает по крайней мере некоторого внимания.

Рассмотрим простую линейную регрессию

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon, \quad (9)$$

где опущены индексы, соответствующие наблюдениям. Величина ε распределена независимо от наблюдений, $E(\varepsilon | x) = E(\varepsilon) = 0$ и

⁸ См. также работу Алберга, Нилсона и Уолша [2]. Пауэлл [134] и Райс [144] предлагают правила выбора узлов в случае, когда их число больше тридцати. Ясно, что с точки зрения рассматриваемых здесь задач эти правила не представляют очень большой ценности.

$\text{var}(y|x) = \text{var}(y) = \sigma^2$. Пусть задана сетка $\Delta = \{\bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \dots < \bar{x}_{k-1}\}$. Определим искусственные переменные:

$$z_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq \bar{x}_1; \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$z_j = \begin{cases} 1, & \text{если } \bar{x}_{j-1} < x \leq \bar{x}_j \\ & (j=2, 3, \dots, k-1); \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$z_k = \begin{cases} 1, & \text{если } x > \bar{x}_{k-1}; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда регрессионная модель, связывающая y с этими искусственными переменными, имеет вид

$$y = \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 + \dots + \gamma_k z_k + \varepsilon^*, \quad (10)$$

где $\gamma_j = E(y|z_j = 1)$ и $E(\varepsilon^* | z_1, z_2, \dots, z_k) = 0$.

В качестве меры «потери информации» при переходе от модели (9) к модели (10) Эйгнер и Голдбергер [3] использовали отношение квадрата коэффициента корреляции (10) к квадрату коэффициента корреляции (9), обозначив его через L :

$$L = [\text{var}(x)]^{-1} \sum_{j=1}^k f_j (\mu_j - \mu)^2, \quad (11)$$

где $f_j = P(z_j = 1)$, $\mu_j = E(x | z_j = 1)$ и $\mu = E(x)$. Предположив, что распределение по группам происходит с одинаковыми вероятностями (т. е. что $f_j = k^{-1}$), Эйгнер и Голдбергер [3] вычислили значение величины (11) для случаев, когда x берется из генеральных совокупностей, распределенных по равномерному, нормальному и экспоненциальному законам.

Интегрируя выражение (9) m раз ($m \geq 1$), мы получим многочлен $(m+1)$ -й степени, а интегрируя m раз выражение (10) — полиномиальный сплайн m -й степени. В этом смысле можно считать, что формула (11) дает долю информации, теряемой при аппроксимации многочлена $(m+1)$ -й степени с помощью полиномиального сплайна степени m . Ценность такого способа измерения информации зависит, конечно, от того, какую важность для нас в той или иной конкретной задаче представляет m -я производная. Например, вполне разумно аппроксимировать квадратичную функцию потребления линейным сплайном, если мы хотим выделить категории дохода, которым будут отвечать различные значения предельной склонности к потреблению. Поэтому, если основным предметом нашего исследования является предельная склонность к потреблению, выражение (11) может служить разумной мерой потери информации.

Если узлы, входящие в сетку Δ , не считаются заданными, то возникает интересный вопрос: можно ли выбрать их (при фиксированном k) таким образом, чтобы при этом максимизировать значение L или, что эквивалентно, минимизировать потерю информации, имеющую место в процессе аппроксимации. Как ни странно, для этой задачи было по-

лучено аналитическое решение, которое, правда, до работы [130] не было сформулировано в рамках сплайновой теории аппроксимации.

Коннор в работе [35] доказал, что если величины x распределены равномерно, то в такой ситуации оптимальное разбиение на группы соответствует равновероятным интервалам, т. е. оптимальной сеткой будет равномерная сетка с равноотстоящими друг от друга узлами. В этом случае Эйгнер и Голдбергер [3] показали, что максимальное значение L равно просто $(1 - k^{-2})$. В 1957 г. Кокс [39] установил, что в случае нормального распределения оптимальное разбиение на группы дает симметричные интервалы с определенной вероятностью по каждую сторону от среднего. В табл. 13 приведены значения вероятностей, соответствующих оптимальным интервалам при $k = 2, 3, 4, 5, 6$, взятые из работы Коннора [35]. В этой же работе Коннора имеются и значения вероятностей, отвечающих оптимальным интервалам для экспоненциального распределения. Эти значения приведены в табл. 14.

Таблица 13

Оптимальные классы для нормального распределения

k	Вероятности каждого из классов
2	0,500; 0,500
3	0,270; 0,459; 0,270
4	0,164; 0,336; 0,336; 0,164
5	0,109; 0,237; 0,307; 0,237; 0,109
6	0,074; 0,181; 0,245; 0,245; 0,181; 0,074

Таблица 14

Оптимальные классы для экспоненциального распределения

k	Вероятности каждого из классов
2	0,797; 0,203
3	0,639; 0,288; 0,073
4	0,530; 0,300; 0,135; 0,035
5	0,451; 0,291; 0,165; 0,074; 0,019
6	0,393; 0,274; 0,176; 0,100; 0,045; 0,012

Соответствующие каждому из этих наборов узлов значения, приведенные Коннором там же, воспроизведены в табл. 15. Из табл. 15 видно, что при всех трех распределениях мало что можно выиграть, используя более трех или четырех узлов, поскольку добавление к ним еще одного узла только незначительно улучшает результаты.

Таблица 15

Значения L для оптимального расположения узлов

Распределение	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
Равномерное	0,750	0,889	0,938	0,960	0,972
Нормальное	0,647	0,810	0,883	0,920	0,942
Экспоненциальное	0,648	0,820	0,891	0,927	0,948

Итак, все это, по-видимому, говорит о том, что во всех рассмотренных здесь ситуациях при выборе оптимального расположения узлов полиномиальная сплайн-функция n -й степени является довольно робастной (в смысле выражения (11)) относительно многочлена $(n + 1)$ -й

степени. Ясно, что если параметры описывающего величину x распределения неизвестны, то при выборе этих «оптимальных» узлов возникнут проблемы. Однако представляется, что в случае, когда имеются оценки этих параметров, сделан по крайней мере небольшой шаг вперед в решении исключительно сложной проблемы оптимального выбора узлов в задачах теории приближений.

8.6. ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

В этом разделе мы приводим две программы, написанные на языке FORTRAN IV, которые могут облегчить применение регрессионных моделей со сплайнами на практике. Первая программа строит преобразованные матрицы наблюдений за объясняющими переменными для кубических сплайнов, вторая — вычисляет коэффициенты билинейного сплайна. Мы дадим здесь лишь краткое описание каждой из программ, поскольку в них самих содержатся комментарии и, кроме того, в них используются обозначения, к которым мы уже привыкли в этой книге.

Программа 1 вычисляет преобразованные матрицы (14) и (39) из главы 3 для случая непериодического (подпрограмма CUBSPL) и периодического (подпрограмма PERCS) кубического сплайна. В непериодическом случае рассматриваются только кубические сплайны, удовлетворяющие граничным условиям (3) и (4) из главы 3. Однако можно легко видоизменить каждую из подпрограмм таким образом, чтобы получить возможность работать с другими вариантами формулировки граничных условий, описанными в разделе 3.8. Для этого достаточно заменить процедуру построения матрицы Λ (обозначенную LAMINV) и процедуру построения матрицы Θ (обозначенную THETA), т. е. строки 450 — 550 распечатки. Далее, для непериодического кубического сплайна приводится матрица, строка которой соответствует вектору ограничений \mathbf{g} из раздела 3.6 и которую мы использовали для проверки наличия структурных изменений в узлах (подпрограмма CHANGE).

На вход программы 1 подаются: число узлов (не более десяти), вид требуемого кубического сплайна (периодический или непериодический), число (увеличенное на два) равноотстоящих друг от друга точек оси абсцисс, которые расположены между концевыми узлами и в которых вычисляются строки преобразованной матрицы, параметры граничных условий π_0 и π_n , определяемые соотношениями (3) и (4) из главы 3, и сами узлы⁹.

Программа 2 для каждого прямоугольника из области определения билинейного сплайна вычисляет коэффициенты билинейной формы, значения которых задаются формулой (6) из главы 4. На вход программы 2 подаются: заголовок, число I интервалов на оси u , число J интервалов на оси v , узлы \bar{u}_i ($i = 1, 2, \dots, I - 1$) и \bar{v}_j ($j = 1, 2, \dots, J - 1$), а также матрица Π коэффициентов регрессии $\{\beta_0, \alpha_i, \delta_j \text{ и } \gamma_{ij}\}$, которая также встречалась нам в формуле (6) главы 4.

⁹ Программу 1 легко видоизменить таким образом, чтобы вычисление преобразованной матрицы можно было производить в любой точке оси абсцисс.

Программа 1

```

C THE FOLLOWING MAIN PROGRAM CALLS THE SUBROUTINES WHICH GENERATE          10
C THE TRANSFORMED REGRESSOR MATRICES FOR PERIODIC (PERCS) AND             ) 20
C NON-PERIODIC CUBIC SPLINES (CUBSPL)                                   30
C INPUT: K1(NUMBER OF KNOTS),NPC(=1 IF PERIODIC,=0 IF NON-PERIODIC),      40
C N(=NUMBER OF EQUALLY SPACED INTERIOR OBSERVATIONS + 2(ENDPOINTS)),PIO   50
C AND PIK (END CONDITION PARAMETERS FOR NON-PERIODIC),X (ARRAY OF KNOTS)  60
DIMENSION X(10),W(10),INDEX(10,2)
REAL*8 LAMTHE(100),LAMINV(100), THETA(20),INCR
1 READ(5,2,END=10)K1,NPC,N,PIO,PIK,(X(I),I=1,K1)
2 FORMAT(3I5,12F5,2)
INCR=(X(K1)-X(1))/FLOAT(N-1)
K=K1-1
IF(NPC.EQ.1)GO TO 4
CALL CUBSPL(K1,X,PIO,PIK,LAMTHE,LAMINV,THETA,W,INDEX)
PRINT 3,PIO,PIK,(X(I),I=1,K1)
3 FORMAT(' - CUBIC SPLINE TRANSFORMATION MATRIX'// WITH PIO=' ,F6.2.
* PIK=' ,F6.2, ' AND KNOTS AT ' ,10F6.2)
KM1=K-1
GO TO 6
4 CALL PERCS(K,X,LAMTHE,LAMINV,THETA,W,INDEX)
PRINT 5,(X(I),I=1,K1)
5 FORMAT(' - PERIODIC CUBIC SPLINE TRANSFORMATION MATRIX'//
* WITH KNOTS AT ' , 10F6.2)
K1=K
PRINT 7
7 FORMAT(//)
XI=X(1)
DO 8 I=1,N
IF(NPC.EQ.0)CALL NEWVAR(XI,W,K1)
IF(NPC.EQ.1)CALL NEWPV(XI,W,K)
XI=XI-INCR
8 PRINT 9,(W(J),J=1,K1)
9 FORMAT(' ' ,10G13.6)
IF(NPC.EQ.0)CALL CHANGE(X,KM1,K,K1,LAMTHE,LAMINV)
GO TO 1
10 STOP
END
SUBROUTINE CUBSPL(K1,X,PIO,PIK,LAMTHE,LAMINV,THETA,W,INDEX)
DIMENSION X(K1),W(K1),INDEX(K1,2)
REAL*8 LAMTHE(K1,K1),LAMINV(K1,K1),THETA(K1,2)
K=K1-1
DO 1 I=1,K1
DO 1 J=1,K1
1 LAMINV(I,J)=0.0
LAMINV(1,1)=2.0
LAMINV(1,2)=-2.0*PIO
LAMINV(K1,K1)=2.0
LAMINV(K1,K)=-2.0*PIK
THETA(K,2)=0.0
DO 2 J=2,K
LAMINV(J,J+1)=(X(J+1)-X(J))/(X(J+1)-X(J-1))
LAMINV(J,J-1)=1.0-LAMINV(J,J+1)
LAMINV(J,J)=2.0
THETA(J,1)=-6.0/((X(J)-X(J-1))*(X(J+1)-X(J)))
2 THETA(J-1,2)=-LAMINV(J,J+1)*THETA(J,1)
CALL MATINV(LAMINV,K1,NB,INDEX)
DO 4 I=1,K1
LAMTHE(I,1)=LAMINV(I,2)*THETA(1,2)
LAMTHE(I,2)=LAMINV(I,2)*THETA(2,1)+LAMINV(I,3)*THETA(2,2)
DO 3 J=3,K
3 LAMTHE(I,J)=-LAMINV(I,J-1)*(THETA(J-2,2)+THETA(J-1,1))
+LAMINV(I,J)*THETA(J,1)+LAMINV(I,J+1)*THETA(J,2)
4 LAMTHE(I,K1)=-LAMINV(I,K1)*(THETA(K-1,2)+THETA(K,1))
RETURN
ENTRY NEWVAR(XI,W,K1)
DO 5 I=2,K1
IF(XI.LE.X(I))GO TO 6
5 CONTINUE
6 J=I-1
Q=(X(J+1)-XI)/(X(J+1)-X(J))
PJ=((X(J+1)-XI)*(X(J+1)-XI)-(X(J+1)-X(J))*(X(J+1)-X(J)))*Q/6.0
PJ1=((XI-X(J))*(XI-X(J))-(X(J+1)-X(J))*(X(J+1)-X(J)))*(1.0-Q)/6.0
DO 7 I=1,K1
W(I)=FJ*LAMTHE(J,I)+PJ1*LAMTHE(J+1,I)
W(J)=W(J)+Q
W(J+1)=W(J+1)+1.0-Q
7 RETURN
END
SUBROUTINE PERCS(K,X,LAMTHE,LAMINV,THETA,W,INDEX)
DIMENSION X(K),W(K),INDEX(K,2)
REAL*8 LAMTHE(K,K),LAMINV(K,K),THETA(K,2)
KM1=K-1
KP1=K+1
DO 1 I=1,K
DO 1 J=1,K
85

```

1	LAMINV(I,J) = 0.0	860
	LAMINV(1,1) = 2.0	870
	LAMINV(1,2) = (X(3)-X(2)) / (X(3)-X(1))	880
	LAMINV(1,K) = 1.0 - LAMINV(1,2)	890
	LAMINV(K,K) = 2.0	900
	LAMINV(K,1) = (X(2)-X(1)) / (X(KP1)-X(K)+X(2)-X(1))	910
	LAMINV(K,KM1) = 1.0 - LAMINV(K,1)	920
	THETA(1,2) = -6./((X(2)-X(1))*(X(3)-X(2)))	930
	THETA(1,1) = 6./((X(3)-X(2))*(X(3)-X(1)))	940
	THETA(K,2) = -6./((X(KP1)-X(K))*(X(2)-X(1)))	950
	THETA(K,1) = 6./((X(2)-X(1))*(X(KP1)-X(K)+X(2)-X(1)))	960
	DO 2 J=2,KM1	970
	LAMINV(J,J) = 2.0	980
	LAMINV(J,J+1) = (X(J+2)-X(J+1))/(X(J+2)-X(J))	990
	LAMINV(J,J-1) = 1.0 - LAMINV(J,J+1)	1000
	THETA(J,1) = 6./((X(J+2)-X(J+1))*(X(J+2)-X(J)))	1010
2	THETA(J,2) = -6./((X(J+1)-X(J))*(X(J+2)-X(J+1)))	1020
	CALL MATINV(LAMINV,K,NB,INDEX)	1030
	DO 4 I=1,K	1040
	LAMTHE(I,1) = LAMINV(I,1)*THETA(1,2)-LAMINV(I,2)*THETA(2,2)+THETA	1050
	* (2,1)+LAMINV(I,K)*THETA(K,1)	1060
	DO 5 J=2,KM1	1070
3	LAMTHE(I,J) = LAMINV(I,J-1)*THETA(J-1,1)+LAMINV(I,J)*THETA(J,2)	1080
	* -LAMINV(I,J+1)*THETA(J+1,2)+THETA(J+1,1)	1090
4	LAMTHE(I,K) = LAMINV(I,K)*THETA(K,2)+LAMINV(I,K-1)*THETA(K-1,1)	1100
	* -LAMINV(I,1)*THETA(1,1)+THETA(1,2)	1110
	RETURN	1120
	ENTRY NEWP(V,XI,W,K)	1130
	DO 5 I=2,KP1	1140
	IF(XI.LE.X(I))GO TO 6	1150
5	CONTINUE	1160
6	J = I-1	1170
	Q = (X(J+1)-XI)/(X(J+1)-X(J))	1180
	PJ = ((X(J+1)-XI)*(X(J+1)-XI)-(X(J+1)-X(J))*(X(J+1)-X(J)))*Q/6.0	1190
	PJ1 = ((XI-X(J))*(XI-X(J))-(X(J+1)-X(J))*(X(J+1)-X(J)))*Q/6.0	1200
	JJ = J-1	1210
	IF(J.EQ.1) JJ=K	1220
	DO 7 I=1,K	1230
7	W(I) = PJ*LAMTHE(JJ,I) + PJ1*LAMTHE(J,I)	1240
	W(JJ) = W(JJ) + Q	1250
	W(J) = W(J) + 1.0 - Q	1260
	RETURN	1270
	END	1280
	SUBROUTINE MATINV(A,NVAR,NB,INDEX)	1290
C	SUBROUTINE MATINV INVERTS A DOUBLE PRECISION NVAR BY NVAR MATRIX.	1300
C	A AND RETURNS THE INVERSE IN A	1310
	DOUBLE PRECISION A(NVAR,NVAR),PIVOT,SWAP,T,AMAX	1320
	DIMENSION INDEX(NVAR,2)	1330
	*EQUIVALENCE (T,SWAP,PIVOT),(K,L1)	1340
C	INITIALIZATION	1350
	DETERM=1.0	1360
	DO 1 J=1,NVAR	1370
1	INDEX(J,1)=0	1380
C	SEARCH FOR PIVOT ELEMENT	1390
	I=0	1400
	IRANK=0	1410
2	AMAX=-1.	1420
	DO 7 J=1,NVAR	1430
	IF(INDEX(J,1))7,3,7	1440
3	DO 6 K=1,NVAR	1450
	IF(INDEX(K,1))6,4,6	1460
4	T=DABS(A(J,K))	1470
	IF(T.LE.AMAX)GO TO 6	1480
5	IROW=J	1490
	ICOLUM=K	1500
	AMAX=T	1510
6	CONTINUE	1520
7	CONTINUE	1530
	IF(AMAX)20,20,8	1540
8	INDEX(ICOLUM,1)=IROW	1550
C	INTERCHANGE ROWS TO PUT PIVOT ELEMENT ON DIAGONAL	1560
	IF(IROW.EQ.ICOLUM)GO TO 12	1570
9	DETERM=-DETERM	1580
	DO 10 L=1,NVAR	1590
	SWAP=A(IROW,L)	1600
	A(IROW,L)=A(ICOLUM,L)	1610
10	A(ICOLUM,L)=SWAP	1620
11	I = I + 1	1630
	INDEX(I,2)=ICOLUM	1640
12	PIVOT=A(ICOLUM,ICOLUM)	1650
	DETERM=PIVOT*DETERM	1660
	IRANK=IRANK+1	1670
C	DIVIDE PIVOT ROW BY PIVOT ELEMENT	1680
	A(ICOLUM,ICOLUM)=1.0	1690
	PIVOT=A(ICOLUM,ICOLUM)/PIVOT	1700

	DO 13 L=1, NVAR	1710
	A(ICOLUM,L)=A(ICOLUM,L)*PIVOT	1720
C	REDUCE NON-PIVOT ROWS	1730
	DO 17 L1=1, NVAR	1740
	IF(L1.EQ.ICOLUM)GO TO 1/	1750
	T=A(L1,ICOLUM)	1760
	A(L1,ICOLUM)=0.0	1770
	DO 16 L=1, NVAR	1780
	A(L1,L)=A(L1,L)-A(ICOLUM,L)*T	1790
	CONTINUE	1800
	GO TO 2	1810
C	INTERCHANGE COLUMNS	1820
	ICOLUM=INDEX(I,2)	1830
	IROW=INDEX(ICOLUM,1)	1840
	DO 19 K=1, NVAR	1850
	SWAP=A(K,IROW)	1860
	A(K,IROW)=A(K,ICOLUM)	1870
	A(K,ICOLUM)=SWAP	1880
	I=I-1	1890
	IP(I)18,21,18	1900
C	NE IS THE NUMBER OF NON-LINEARY INDEPENDENT COLUMNS	1910
	NE=NVAR-IRANK	1920
	RETURN	1930
	END	1940
	SUBROUTINE CHANGE(X,KM1,K,K1,LAMTHE,G)	1950
	DIMENSION X(K1)	1960
	REAL*8 LAMTHE(K1,K1),G(KM1,K1)	1970
	DO 1 I=2,K	1980
	DO 1 J=1,K1	1990
	G(I-1,J)=(LAMTHE(I+1,J)-LAMTHE(I,J))/(X(I+1)-X(I))-LAMTHE(I,J)	2000
	*-LAMTHE(I-1,J))/(X(I)-X(I-1))	2010
	PRINT 2	2020
	FORMAT(/// RESTRICTION MATRIX FOR STRUCTURAL CHANGE TESTS AT THE',	2030
	*' INTERIOR KNOTS'/)	2040
	DO 3 I=1,KM1	2050
	PRINT 4,(G(I,J),J=1,K1)	2060
	FORMAT(' ',10G13.6)	2070
	RETURN	2080
	END	2090

Программа 2

C THIS PROGRAM CALCULATES BILINEAR SPLINE COEFFICIENTS	10
DIMENSION UBAR(7),VBAR(7),U(144),V(144),ABCD(256),TITLE(20),	20
*COEF(81),Z(16)	30
C INPUT TITLE, I(NUMBER OF U INTERVALS), AND J(NUMBER OF V INTERVALS)	40
1 READ(5,2,END=7)TITLE,I,J	50
2 FORMAT(20A4/215)	60
PRINT 3,TITLE,I,J	70
3 FORMAT(1H1,20A4//4H I =,I2,5X,3HJ =,I2/)	80
JP1=J+1	90
I1 = I-1	100
J1 = J-1	110
IP1 = I+1	120
JP1 = J+1	130
IPI = I+I	140
JPJ = J+J	150
C INPUT AND WRITE KNOTS	160
READ 4,(UBAR(K),K=1,I1)	170
4 FORMAT(8E10.6)	180
PRINT 5,(UBAR(K),K=1,I1)	190
5 FORMAT(' U KNOTS:',8G14.4/)	200
READ 4,(VBAR(M),M=1,J1)	210
PRINT 6,(VBAR(M),M=1,J1)	220
6 FORMAT(' V KNOTS:',8G14.4/)	230
C INPUT AND WRITE REGRESSION COEFFICIENTS	240
CALL INPUTC(COEF,I,J,IP1,JP1)	250
CALL SUB(TITLE,UBAR,VBAR,U,V,IPI,JPJ,I,J,I1,J1,ABCD,Z,IP1,JP1)	260
CALL OUTPUT	270
GO TO 1	280
7 STOP	290
SUBROUTINE SUB(TITLE,UBAR,VBAR,U,V,IPI,JPJ,I,J,I1,J1,ABCD,Z,IP1,	300
*JP1)	310
DIMENSION COEF(IP1,JP1),U(IPI,IP1),V(JP1,JPJ),ABCD(IPI,JPJ),Z(1),	320
*UBAR(I1),VBAR(J1),TITLE(1)	330
INTEGER=4 BLANK/' ',LAB1/' U DI',LAB2/' MENS',LAB3/' ION '	340
INTEGER=2 ONEST/' *',STAR/' **'	350
C ZERO OUT U AND V	360
DØ 1 K=1,IP1	370
DØ 1 M=1,JP1	380
1 U(K,M) = 0.0	390
DØ 2 K=1,JP1	400
DØ 2 M=1,JPJ	410
2 V(K,M) = 0.0	420
C COMPUTE U	430
U(1,1) = 1.0	440
U(1,2) = UO	450
U(IP1,2) = 1.0	460
U(2,1) = 1.0	470
U(2,2) = UBAR(1)	480
U(I+2,2) = 1.0	490
U(I+2,3) = 1.0	500
IF(I-2)6,6,3	510
3 DØ 5 K=3,I	520
U(K,1) = 1.0	530
U(K,2) = UBAR(K-1)	540
U(I+K,2) = 1.0	550
U(I+K,K+1) = 1.0	560
DØ 4 L=3,K	570
U(K,L) = UBAR(K-1)-UBAR(L-2)	580
4 U(K+I,L) = 1.0	590
5 CONTINUE	600
C COMPUTE V	610
6 V(1,1) = 1.0	620
V(2,1) = VO	630
V(2,JP1) = 1.0	640
V(1,2) = 1.0	650
V(2,2) = VBAR(1)	660
V(2,J+2) = 1.0	670
V(3,J+2) = 1.0	680
IF(J-2)10,10,7	690
7 DØ 9 M=3,J	700
V(1,M) = 1.0	710
V(2,M) = VBAR(M-1)	720
V(2,J+M) = 1.0	730
V(M+1,J+M) = 1.0	740
DØ 8 L=3,M	750
V(L,M) = VBAR(M-1)-VBAR(L-2)	760
8 V(L,M+J) = 1.0	770
9 CONTINUE	780
C COMPUTE THE MATRIX OF COEFFICIENTS FOR EACH GRID 'U' = COEF * V	790
10 DØ 12 K=1,IP1	800
DØ 11 M=1,JP1	810
Z(M) = 0.0	820
	830

	DØ 11 L=1,IP1	840
11	Z(M) = Z(M)+U(K,L)*CØEF(L,M)	850
	DØ 12 M=1,JPJ	860
	ABCD(K,M) = 0.0	870
	DØ 12 L=1,JP1	880
12	ABCD(K,M) = ABCD(K,M)+Z(L)*V(L,M)	890
	RETURN	900
	ENTRY INPUTC(CØEF,I,J,IP1,JP1)	910
C	INPUT ALPHA, DELTA, AND GAMMA RESPECTIVELY	920
	READ 13, (CØEF(K+1,1), K=1, I)	930
13	FØRMT(8E10.6)	940
	READ 13, (CØEF(1,M+1), M=1, J)	950
	RZAD 13, ((CØEF(K+1,M+1), K=1, I), M=1, J)	960
	READ 13, CØEF(1,1), UO, VO	970
14	PRINT 15	980
15	FØRMT(// ' REGRESSION CØEFFICIENTS MATRIX ', 10X, ' C * DELTA '/42X, 1	990
	*1(1H//43X, ' A * G'/43X, ' L * A'/43X, ' F * K'/43X, ' H * M'/43X,	1000
	* ' A * A' //)	1010
	PRINT 16, (CØEF(1,M), M=1, JP1)	1020
16	FØRMT(1X, G14.8, 3H * , 8G14.6)	1030
	NVRS=JP1#8	1040
	PRINT 17, (STAR, KK=1, NVRS)	1050
	FØRMT(1X, 66A2)	1060
	DØ 18 K=2, IP1	1070
18	PRINT 16, (CØEF(K,M), M=1, JP1)	1080
C	INPUT MINIMUM VALUES UD AND VD	1090
	PRINT 19, UO, VO	1100
19	FØRMT(// ' UO = ', G15.6, 5X, ' VO = ', G15.6)	1110
	RETURN	1120
	ENTRY ØUTPUT	1130
	PRINT 20	1140
20	FØRMT(1HØ, ' PØLYNOMIAL CØEFFICIENTS A, B, C, D FØR EACH GRID WITH	1150
	* THE ØRIGIN TRANSLATED TØ THE LØWER LEFTHAND CØRNER '//)	1160
	NVRS=I#8	1170
	PRINT 21, (STAR, KK=1, NVRS)	1180
21	FØRMT(1ØX, 1H#, 66A2)	1190
	DØ 33 M1=1, J	1200
	M = J+1-M1	1210
	PRINT 22, (ØNEST, KK=1, I)	1220
	FØRMT(1ØX, 1H#, 9(14X, A2))	1230
	PRINT 23, (ABCD(K,M), K=1, I)	1240
23	FØRMT(2H A, 8X, 1H#, 8(1X, G12.5, 3H *))	1250
	PRINT 24, (ABCD(K+I, M), K=1, I)	1260
24	FØRMT(2H B, 8X, 1H#, 8(1X, G12.5, 3H *))	1270
	PRINT 25, (ABCD(K, J+M), K=1, J)	1280
25	FØRMT(2H C, 8X, 1H#, 8(1X, G12.5, 3H *))	1290
	PRINT 26, (ABCD(K+I, J+M), K=1, I)	1300
26	FØRMT(2H D, 8X, 1H#, 8(1X, G12.5, 3H *))	1310
	IF(M1-J) 31, 27, 27	1320
27	PRINT 22, (ØNEST, KK=1, I)	1330
	PRINT 28, VO, (STAR, KK=1, NVRS)	1340
28	FØRMT(G10.3, 1H#, 66A2)	1350
	PRINT 29, UO, (UBAR(K), K=1, I1)	1360
29	FØRMT(6X, 8(4X, GØ.3, 3X))	1370
	NT= I#2-1	1380
	PRINT 30, (BLANK, KK=1, NT), LAB1, LAB2, LAB3	1390
30	FØRMT(1ØX, 33A4)	1400
	GØ TØ 33	1410
31	PRINT 22, (ØNEST, KK=1, I)	1420
	PRINT 32, VBAR(M-1), (STAR, KK=1, NVRS)	1430
32	FØRMT(G10.3, 1H#, 66A2)	1440
33	CØNTINUE	1450
	RETURN	1460
	END	1470

9.1. СПЛАЙНОВЫЕ ФУНКЦИИ ПОТЕРЬ, РАССМОТРЕННЫЕ В ПРЕДЫДУЩИХ ГЛАВАХ

До сих пор мы занимались применением сплайн-функций в регрессионном анализе. При этом наша основная идея заключалась в том, что наличие «структурного изменения» требует использования функций кусочного вида. Аналогичным же образом сплайны можно применять и для описания «структурного изменения», которое претерпевает функция потерь при переходе от интервала, соответствующего невыполнению плановых показателей, к интервалу, соответствующему их перевыполнению. Иными словами, сплайн-функции можно применять в тех случаях, когда приходится оперировать функцией потерь асимметричного вида.

Асимметричные функции потерь уже привлекали к себе внимание статистиков и специалистов по теории принятия решений, но экономисты большей частью или полностью пренебрегали ими или же, применяя обычную квадратичную функцию потерь, лишь мимоходом отмечали, что присущее ей свойство симметрии скорее всего бессмысленно (исключение составляет работа Боумэна [24]). В то же время функции, которыми пользуются статистики и специалисты по теории принятия решений, представляют собой, как правило, сплайн-функции; однако это обстоятельство почему-то осталось незамеченным. В самом деле, часто применяемая линейная функция потерь (см. например, [140])

$$L(x; x^*) = \begin{cases} |x - x^*|, & \text{если } x \leq x^*; \\ \alpha |x - x^*|, & \text{если } x > x^*, \end{cases}$$

где x^* есть целевое значение переменной x , а $\alpha > 0$, является, разумеется, линейным сплайном с узлом в точке x^* . В более общем случае сплайном будет и степенная функция потерь Бритни и Уинклера [26]

$$L(x; x^*) = \begin{cases} |x - x^*|^r, & \text{если } x \leq x^*; \\ \alpha |x - x^*|^s, & \text{если } x > x^*, \end{cases}$$

где r , s и α — положительные действительные числа. Более того, если функции потерь состоят более чем из двух кусков (см., например, работу Бритни и Уинклера [26, с. 358, рис. 1 и 2]), они вновь попадают в разряд сплайн-функций, но уже с большим числом узлов.

Если бы единственной целью этой главы было заново проделать всю работу, которую уже и без того выполнили специалисты по теории

принятия решений и статистики, и просто заменить их терминологию терминами теории сплайнов, это было бы довольно бесполезным занятием. Однако применение таких асимметричных функций потерь к конкретным экономическим задачам может дать и некоторые полезные результаты. В этой главе мы будем заниматься степенной функцией потерь, для которой $r = s = 2$. Это позволит нам в рамках различных экономических моделей сконцентрировать внимание на возможности по-разному описывать последствия невыполнения и перевыполнения целевых показателей. С дальнейшими приложениями к задаче оценивания «почти пограничных» производственных функций (которые здесь не рассматриваются) можно познакомиться в работе [4].

9.2. КВАДРАТИЧНАЯ СПЛАЙНОВАЯ ФУНКЦИЯ ПОТЕРЬ

Пусть x — некоторая переменная с целевым значением x^* . Рассмотрим функцию потерь

$$L(x; x^*) = \alpha(x - x^*)^2, \quad \alpha > 0. \quad (1)$$

Функция потерь вида (1), называемая квадратичной функцией потерь, имеет много полезных свойств, а именно она (1) принимает большие значения при больших отклонениях (ошибках) от x^* , (2) дает линейные решающие правила и (3) служит разумным первым приближением для функций потерь более сложного вида. К сожалению, при использовании функции потерь вида (1) отклонения и в ту и в другую сторону от целевого значения оцениваются одинаковым образом, т. е. симметрично.

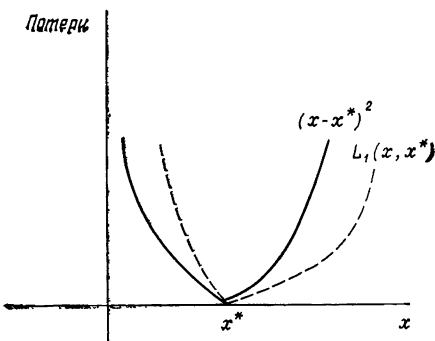


Рис. 9.1. Квадратичная сплайновая функция потерь при $\alpha_1 > 1$ и $\alpha_2 < 1$

Поэтому, в качестве альтернативы функции (1), определим *квадратичную сплайновую функцию потерь*

$$L_1(x; x^*) = \begin{cases} \alpha_1(x - x^*)^2, & \text{если } x \leq x^*; \\ \alpha_2(x - x^*)^2, & \text{если } x > x^*, \end{cases} \quad (2)$$

где $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$. На интуитивном уровне функцию потерь (2) можно рассматривать как «искаженную» функцию потерь (1), что графически показано на рис. 9.1.

В качестве примера использования квадратичной сплайновой функции потерь рассмотрим следующую статическую модель, аналогичную модели Холта [95, с. 23—25]:

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G; \\ C &= cY; \quad c \neq 1, \end{aligned} \quad (3)$$

где Y — эндогенная переменная, описывающая национальный доход, C — эндогенная переменная, описывающая потребление, I — экзо-

генные частные инвестиции (которые считаются случайной величиной со средним значением $E(I)$ и конечной дисперсией), G — государственные расходы (управляющая переменная). Все эти величины исчисляются (в постоянных ценах) в долларах в год. Далее, коэффициент c есть предельная склонность к потреблению (которая считается известной). В качестве функции общественных потерь рассмотрим выраженные

$$\tilde{L}(Y, G; Y^*, G^*) = \delta(Y - Y^*)^2 + L(G; G^*), \quad \delta > 0, \quad (4)$$

которое является суммой обычной квадратичной функции потерь и квадратичной сплайновой функции потерь

$$L(G; G^*) = \begin{cases} \alpha_1(G - G^*)^2, & \text{если } G \leq G^* \\ \alpha_2(G - G^*)^2, & \text{если } G > G^* \end{cases} \quad (\alpha_1 > 0 \text{ и } \alpha_2 > 0),$$

где Y^* и G^* — целевые значения национального дохода и государственных расходов соответственно. Выбор в качестве первого слагаемого обычной квадратичной функции потерь предполагает, что явления инфляции (рассматриваемой как следствие избыточного совокупного спроса) и безработицы (трактуемой как следствие недостаточного спроса) оцениваются симметричным образом. Такая ситуация, однако, не имеет места для целевого значения государственных расходов G^* , которые определяются исключительно требованиями государственных ведомств и служб (а не соображениями стабильности). Поэтому вид нашей функции $L(G; G^*)$ указывает на то, что чрезмерность государственных расходов и их недостаточность не рассматриваются как симметричные явления. Наличие такой асимметрии может служить отражением различных общественно-политических точек зрения на роль государства.

Решая структурные уравнения (3) относительно Y , получаем

$$Y = \frac{1}{1-c} (G + I). \quad (5)$$

Ожидаемая величина потери для (4) равна

$$E(\tilde{L}) = \delta \{ \text{var}(Y) + [Y^* - E(Y)]^2 \} + L(G; G^*), \quad (6)$$

где $\text{var}(Y) = (1-c)^{-2} \text{var}(I)$ и $E(Y) = [G + E(I)]/(1-c)$. Минимизация выражения (6) по управляющей переменной G дает следующее условие первого порядка:

$$\frac{dE(\tilde{L})}{dG} = \frac{2}{1-c} \left\{ Y^* - \left[\frac{G + E(I)}{1-c} \right] \right\} + 2 \begin{cases} \alpha_1(G - G^*), & G \leq G^* \\ \alpha_2(G - G^*), & G > G^* \end{cases} = 0. \quad (7)$$

Решая уравнение (7) относительно управляющей переменной G , получаем

$$G = \begin{cases} \frac{\delta(1-c)Y^* + \alpha_1(1-c)^2G^* - \delta E(I)}{\delta + \alpha_1(1-c)^2}, & \text{если } G \leq G^*; \\ \frac{\delta(1-c)Y^* + \alpha_2(1-c)^2G^* - \delta E(I)}{\delta + \alpha_2(1-c)^2}, & \text{если } G > G^*. \end{cases} \quad (8)$$

На первый взгляд может показаться, что соотношения (8) дают два различных значения для «оптимального» уровня государственных расходов, но можно легко показать, что на самом деле это не так. Действительно, предположим, что

$$(1 - c)Y^* - G^* - E(I) < 0, \quad (9)$$

т. е. что потребляемая часть целевого значения национального дохода меньше, чем сумма целевого значения государственных расходов и среднего значения инвестиций. Умножим теперь неравенство (9) на δ и добавим к обеим его частям величину $\alpha_1(1 - c)^2 G^*$, после чего преобразуем наше неравенство следующим образом:

$$\delta(1 - c)Y^* + \alpha_1(1 - c)^2 G^* - E(I) < [\delta + \alpha_1(1 - c)^2]G^*,$$

т. е. $G < G^*$.

Аналогично, обращая неравенство (9), можно получить, что $G > G^*$. Отсюда следует, что выражение (8) представляет собой *единственное* значение оптимального уровня государственных расходов, т. е. является наилучшим компромиссом между целевыми значениями национального дохода и государственных расходов.

Описанная выше модель имеет, конечно, упрощенный характер. Тем не менее ее ценность заключается в том, что она показывает, как можно избежать присущего обычной квадратичной функции потерь нежелательного свойства симметрии и в то же время сохранить желательные свойства 1—3. Кроме того, она служит хорошим отправным пунктом для перехода к рассмотрению функций потерь более сложного вида, включающему квадратичные сплайновые функции потерь. Изучение функций потерь такого вида — тема всех последующих разделов настоящей главы.

9.3. АСИММЕТРИЧНАЯ ФУНКЦИЯ ПОТЕРЬ В ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривая в разделе 9.2 простую модель национального дохода, мы предполагали, что предельная склонность к потреблению c — известная величина. Это предположение, хотя оно и казалось довольно безобидным, на самом деле представляет собой весьма смелую гипотезу, которая приводит к серьезным последствиям. Если параметр c неизвестен, то это вносит в функцию потерь дополнительный элемент неопределенности (помимо вероятностного характера величины инвестиций). Если считать параметр c неизвестным, а это предположение гораздо ближе к реальному положению вещей, то необходимо провести его оценивание, пользуясь временными рядами из статистики национальных счетов. Таким образом, мы приходим к простой задаче теории управления, которая заключается в том, что на основе информации, полученной путем наблюдения за ходом регрессионного процесса в течение T периодов, требуется выбрать значение управляющей переменной для $(T + 1)$ -го периода таким образом, чтобы минимизировать определенную функцию потерь. В данном разделе мы рассмотрим эту

задачу для случая, когда имеется только одна управляющая переменная, причем эта управляющая переменная входит в функцию потерь несимметричным образом.

Пусть вектор наблюдений $y = [y_1, y_2, \dots, y_T]'$ генерируется процессом множественной регрессии

$$y = x_1 \beta_1 + X_2 \beta_2 + \varepsilon, \quad (10)$$

где $x_1 = [x_{11}, x_{21}, \dots, x_{T1}]'$ есть T -мерный вектор-столбец наблюдений, соответствующий прошлым значениям управляющей переменной, X_2 — матрица наблюдений размерности $T \times (k-1)$, которые соответствуют значениям $(k-1)$ неуправляемых переменных¹, β_1 и $\beta_2 = [\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_k]'$ — неизвестные параметры регрессии, а ε есть T -мерный вектор-столбец нормальных и независимо распределенных возмущающих членов с нулевым математическим ожиданием и неизвестной дисперсией σ^2 . Обозначим через z значение зависимой переменной в момент $T+1$, т. е. положим $z \equiv y_{T+1}$, и пусть z генерируется следующим образом:

$$z = w_1 \beta_1 + w_2 \beta_2 + \varepsilon_{T+1},$$

где w_1 — значение управляющей переменной в момент $T+1$, w_2 — заданный вектор значений $(k-1)$ неуправляемых переменных, а ε_{T+1} — возмущающий член, распределенный нормально и независимо от ε и имеющий нулевое математическое ожидание и дисперсию σ^2 . Предположим теперь, что ранг матрицы $X = [x_1 | X_2]$ равен k , $v = T - k > 2$ и что неизвестные параметры $\beta = [\beta_1 | \beta_2]'$ и σ^2 имеют расплывчатое (неинформативное) априорное распределение с соответствующей функцией плотности². Тогда из обычного байесовского анализа следует, что апостериорным распределением величины z при заданных значениях y и $w = [w_1 | w_2]$ будет t -распределение с математическим ожиданием

$$E(z) = w\hat{\beta} = w_1 \hat{\beta}_1 + w_2 \hat{\beta}_2$$

и дисперсией

$$E[z - E(z)]^2 = \bar{s}^2 [1 + w(X'X)^{-1}w'], \quad (11)$$

где $\bar{s}^2 = vs^2/(v-2)$ и

$$s^2 = (y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta})/v, \\ \hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

¹ Если модель содержит свободный член, то матрица X_2 имеет столбец из единиц. Если элементы X_2 являются случайными величинами, то предполагается, что они распределены независимо от ε и не зависят от β_1 , β_2 и σ^2 , а если они представляют собой взятые с запаздыванием значения зависимой переменной, то при формировании функции правдоподобия предполагается, что даны их начальные значения.

² Иными словами, предположим, что совместное распределение β и σ пропорционально σ^{-1} .

есть оценки обычного метода наименьших квадратов для σ^2 и β соответственно ³.

Получив распределение $z = y_{T+1}$, т. е. величины зависимой переменной в момент времени $T + 1$, мы теперь можем сформулировать критерий, с помощью которого лицо, принимающее решение, может проанализировать проблему выбора между достижением значения показателя z , близкого к некоторому заданному значению z^* , и сохранением значения управляющей переменной w_1 в момент $T + 1$ вблизи желаемого уровня w_1^* . А именно, рассмотрим (при $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$) функцию потерь

$$L(z, w_1; z^*, w_1^*) = (z - z^*)^2 + \begin{cases} \alpha_1 (w_1 - w_1^*)^2, & \text{если } w_1 \leq w_1^*; \\ \alpha_2 (w_1 - w_1^*)^2, & \text{если } w_1 > w_1^*, \end{cases} \quad (12)$$

которая учитывает как потерю, связанную с отклонением от целевого значения z^* , так и потерю, соответствующую сдвигу управляющей переменной с ее желаемого уровня w_1^* ⁴. Имеющаяся при $\alpha_1 \neq \alpha_2$ асимметрия в виде зависимости потери от управляющего параметра w_1 позволяет по-разному оценивать последствия превышения желаемого уровня w_1^* и последствия того, что значение w_1 будет меньше этого уровня. Конечно, уместность такого подхода зависит от вида конкретной задачи, но, вообще говоря, он дает более разумное представление о последствиях принятия того или иного решения.

Так как z является случайной величиной, выражение (12) имеет стохастический характер. Поскольку мы не можем минимизировать функцию от случайной величины, задачей лица, принимающего решение, будет минимизация ожидаемого значения потери (12) $E(L)$ в зависимости от выбора управляющей переменной w_1 . Учитывая, что

$$E(z - z^*)^2 = \text{var}(z) + [z^* - E(z)]^2,$$

и пользуясь соотношением (11), получаем, что ожидаемое значение (12) равно

$$E(L) = \bar{s}^2 [1 + \mathbf{w}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{w}'] + (z^* - \mathbf{w}\hat{\beta})^2 + \begin{cases} \alpha_1 (w_1 - w_1^*)^2, & \text{если } w_1 \leq w_1^*; \\ \alpha_2 (w_1 - w_1^*)^2, & \text{если } w_1 > w_1^*. \end{cases} \quad (13)$$

Продифференцируем (13) по управляющей переменной w_1 , приравняем полученное выражение к нулю и решим это уравнение относительно w_1 . Получим

$$\hat{w}_1 = \frac{\hat{\beta}_1 z^* - w_2(\bar{s}^2 M^{21} + \hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2) + \alpha_i w_1^*}{\bar{s}^2 M^{11} + \hat{\beta}_1^2 + \alpha_i}, \quad (14)$$

³ См. работу Зельнера [181, с. 72—74]. В этом разделе и в разделе 9.4 мы используем обозначения, взятые из этой книги.

⁴ Поскольку потеря («отрицательная» полезность) определяется с точностью до линейной функции, в α_1 и α_2 можно включить любой коэффициент, зависящий от $(z - z^*)^2$.

где $i = 1$ или $i = 2$ и где матрица

$$(X' X)^{-1} = \begin{bmatrix} M^{11} & M^{12} \\ M^{21} & M^{22} \end{bmatrix}$$

представлена в блочном виде в соответствии с соотношением $X = [x_1 | x_2]$.

Вопрос о том, какое из значений i ($i = 1$ или $i = 2$) необходимо подставить в (14), зависит от того, выполняется или нет неравенство

$$\hat{\beta}_1 z^* - w_2 (\bar{s}^2 M^{21} + \hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2) < (\bar{s}^2 M^{11} + \hat{\beta}_1^2) w_1^*. \quad (15)$$

Если неравенство (15) справедливо, то, прибавив к обеим его частям $\alpha_i w_1^*$ и разделив на $(\bar{s}^2 M^{11} + \hat{\beta}_1^2 + \alpha_i) > 0$, можно получить, что $\hat{w}_1 < w_1^*$. Следовательно, если выполнено условие (15), то $i = 1$. В противном случае $i = 2$ ⁵.

При фиксированных данных наблюдений неравенство (15) можно рассматривать как функцию, зависящую только от целевого значения z^* и желаемого уровня w_1^* . Для каждой пары значений (z^*, w_1^*) можно определить, выполняется ли соотношение (15) и лежит ли оптимальное значение управляющей переменной выше или ниже желаемого уровня \hat{w}_1 . При заданном z^* критическое значение w_1^* , которое превращает (15) в равенство, равно

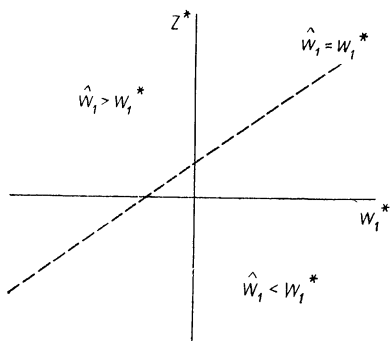


Рис. 9.2. Связь между \hat{w}_1 и w_1^* при заданном z^*

$$\tilde{w}_1^* = \frac{\hat{\beta}_1 z^* - w_2 (\bar{s}^2 M^{21} + \hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2)}{\bar{s}^2 M^{11} + \hat{\beta}_1^2}.$$

Если желаемый уровень w_1^* больше значения \tilde{w}_1^* , то неравенство (15) справедливо и, следовательно, оптимальное значение управляющей переменной \hat{w}_1 меньше ее желаемого уровня. Если желаемый уровень w_1^* меньше \tilde{w}_1^* , то оптимальное значение управляющей переменной \hat{w}_1 больше, чем ее желаемый уровень.

Аналогично при заданном w_1^* критическим значением z^* , которое обращает (15) в равенство, будет величина

$$\tilde{z}^* = \frac{w_2 (\bar{s}^2 M^{21} + \hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2) + (\bar{s}^2 M^{11} + \hat{\beta}_1^2) w_1^*}{\hat{\beta}_1}. \quad (16)$$

При целевых значениях z^* , меньших \tilde{z}^* , оптимальное значение управляющей переменной \hat{w}_1 меньше, чем ее желаемый уровень. При целе-

⁵ Если в (15) имеет место равенство, то i может быть равным как 1, так и 2, поскольку $\hat{w}_1 = w_1^*$.

вых значениях z^* , больших \hat{z}^* , оптимальное значение управляющей переменной $\hat{\omega}_1$ больше ее желаемого уровня.

Эти результаты графически изображены на рис. 9.2, где предполагается, что обе величины — β_1 и w_2 ($s^2 M^{21} + \beta_1 \beta_2$) — положительны. Пунктирная линия — это график зависимости (16), для точек которого $\hat{\omega}_1 = \omega_1^*$.

9.4. РОБАСТНОСТЬ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ПОТЕРЬ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В рамках простой задачи оптимального управления Зельнер и Гайзель [182] исследовали чувствительность обычной квадратичной функции потерь к ошибкам спецификации⁶. Их анализ можно разбить на две основные части: (1) анализ ошибок спецификации, когда истинная функция потерь принадлежит к определенному классу симметричных функций, и (2) анализ ошибок спецификации, когда истинная функция потерь является линейным сплайном. В этом разделе мы проанализируем ошибки спецификации, когда истинная функция потерь является квадратичной сплайн-функцией. Такой подход позволит нам непосредственно оценить «издержки» пренебрежения асимметрией, возникающие при использовании обычной квадратичной функции потерь.

Рассмотрим модель (10) из раздела 9.3 с дополнительным упрощением, состоящим в том, что неуправляемые переменные отсутствуют, т. е. в уравнении (10) нет матрицы X_2 . Кроме того, заменим функцию потерь вида (12) квадратичной сплайновой функцией потерь

$$L(z; z^*) = \begin{cases} (z - z^*)^2, & z \leq z^*; \\ k(z - z^*)^2, & z > z^*. \end{cases} \quad (17)$$

Хотя в некотором смысле функция потерь (17) и представляет собой упрощенный вариант формулы (12), а именно в том смысле, что в ней не учитываются «издержки управления», она в то же время является и существенно более сложной, поскольку дает возможность рассматривать случайную часть (12) асимметричным образом. Функция потерь (17) является, конечно, случайной ввиду наличия члена ε_{T+1} и вследствие того, что коэффициент β_1 неизвестен.

Если $k = 1$, то, минимизируя выражение

$$E[L(z; z^*)] = E(z - z^*)^2 = \text{var}(z) + [z^* - E(z)]^2$$

по управляющей переменной ω_1 , можно получить следующее оптимальное решение:

$$\omega_q = \frac{z^*}{\hat{\beta}_1} \left[\frac{1}{1 + \gamma^2} \right], \quad (18)$$

⁶ Большую часть результатов Зельнера—Гайзеля можно также найти в книге [181, глава XI].

где

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^T x_t y_t}{\sum_{t=1}^T x_t^2}; \quad \gamma^2 = \left[\hat{\beta}_1^2 (v-2) \frac{\sum_{t=1}^T x_t^2}{\sum_{t=1}^T x_t^2} \right] / v s^2;$$

$$v = T - 1; \quad s^2 = \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{\beta}_1 x_t)^2 / v.$$

Первый множитель в правой части (18) $z^*/\hat{\beta}_1$ является решением, соответствующим эквивалентному достоверности случаю (w_{ce}), т. е. оптимальным решением, полученным минимизацией выражения (17) при условии $\beta_1 = \hat{\beta}_1$. Второй множитель (18) выражает точность оценки β_1 и, с учетом неполноты информации о β , подправляет решение, соответствующее детерминированному случаю.

При $k \neq 1$ функция потерь (18) несимметрична и вычислить ожидаемое значение (17) не так просто, поскольку приходится вычислять моменты n -го порядка. Тем не менее можно показать (подробности вывода см. в приложении, раздел 9.8), что

$$E[L(z; z^*)] = kE(z - z^*)^2 + (1 - k) \times$$

$$\times \left\{ \left[\frac{v-3}{(v-2)(v-1)} \right] \frac{t_0(v+t_0^2)}{g} f(t_0) + E(z - z^*)^2 F(t \leq t_0) \right\}, \quad (19)$$

где $f(t_0)$ и $F(t \leq t_0)$ — соответственно функция плотности t -распределения Стьюдента и функция распределения, $t_0 = \sqrt{g}(z^* - \hat{\beta}_1 \omega_1)$, а

$$g = \left[s^2 \left(1 + \omega_1^2 / \sum_{t=1}^T x_t^2 \right) \right]^{-1}.$$

Поскольку выражение (19) в высшей степени нелинейно по ω_1 , получить подобное формуле (18) аналитическое решение, которое давало бы оптимальное значение величины ω_1 , невозможно. Тем не менее численные решения, конечно, имеются.

Следуя подходу Зельнера и Гайзеля [182], рассмотрим нашу простую модель в применении к задаче о росте объема денежной массы. Пусть $y_t = Y_t - Y_{t-1}$ есть годовое изменение в величине переменной дохода Фридмана — Майзельмана [63], $x_t = M_t - M_{t-1}$ — годичный прирост объема денежной массы, β_1 — «коэффициент прироста денежной массы». Задача лица, принимающего решение, состоит в следующем: используя данные, приведенные в табл. 16 и описывающие значения этих переменных для США за период 1921—1929 гг., определить величину прироста объема денежной массы в 1930 г. $\omega_1 = x_{T+1}$ таким образом, чтобы изменение показателя дохода $z \equiv y_{T+1}$ было близко к целевому значению, составляющему $z^* = 10$ млрд. дол.

Используя эти данные, можно в результате оценивания получить следующее уравнение регрессии:

$$\hat{y}_t = 2,0676x_t,$$

$$(0,8813)$$

Таблица 16

Величины дохода и объема денежной массы
в млн. дол.

t	Год	Y_t	M_t	y_t	x_t
0	1920	73122	34168	—	—
1	1921	61799	32311	-11323	-1857
2	1922	64717	33191	2918	880
3	1923	74624	36031	9907	2840
4	1924	76728	37951	2104	1920
5	1925	78575	41412	1847	3461
6	1926	84655	43036	6080	1624
7	1927	83470	44064	-1185	1028
8	1928	82796	45749	674	1685
9	1929	91771	45938	8975	189

Источник. [63, с. 259].

соответствует симметричному случаю, в котором получается оптимальное решение (19). Ожидаемая потеря для каждого из этих оптимальных решений приведена в столбце (3), а ожидаемая потеря, отвечающая использованию квадратичной функции потерь, т. е. задаваемой формулой (18) величине управляющего параметра ω_g , — в столбце (4). В столбце (5) содержится относительная доля увеличения ожидаемой потери, если пренебречь асимметрией и вместо этого взять зна-

где в скобках указаны обычные средние квадратичные ошибки $\hat{\beta}_1$, $s^2 = 26,81$, $\sum_{t=1}^T x_t^2 = 34,158$ и $\nu = 8$.

В столбце (2) табл. 17 для различных значений k , а именно для $k = 0,25; 0,50; 0,75; 1,0; 1,5; 2,0; 3,0$, приведены соответствующие этим данным наблюдений и этой статистике оптимальные значения величины ω_1 , которые минимизируют выражение (19). Такие значения k отвечают различным уровням асимметрии функции потерь (17), причем $k = 1$ соответ-

Таблица 17

Значения управляющего параметра, ожидаемая потеря и относительная ожидаемая потеря в модели роста объема денежной массы

Параметр асимметрии k (1)	Оптимальное значение $\hat{\omega} = \omega^*$ (2)	Ожидаемая потеря при $\hat{\omega} = \omega^*$ (3)	Ожидаемая потеря при $\hat{\omega} = \omega_g$ (4)	$\frac{(4) - (3)}{(3)}$ (5)	Ожидаемая потеря при $\hat{\omega} = \omega_{ce}$ (6)	$\frac{(6) - (3)}{(3)}$ (7)
0,25	5,447	36,61	42,67	0,1655	37,48	0,02376
0,50	4,639	44,84	46,87	0,04527	44,98	0,003122
0,75	4,196	50,64	51,06	0,009294	52,48	0,03633
1,0	3,893	55,25	55,25	0,0000	59,98	0,08610
1,5	3,481	62,50	63,63	0,01808	74,97	0,1782
2,0	3,198	68,24	72,01	0,05525	89,97	0,3184
3,0	2,809	77,24	88,78	0,1494	120,0	0,5536

чение ω_g . Как показывают эти числа, для значительных отклонений от симметричного случая, т. е. при $k = 0,25$ и $k = 3$, относительное увеличение ожидаемой потери составляет около 15%. Поэтому можно сказать, что в этих примерах квадратичная функция потерь не является робастной относительно заметных отклонений от симметричного случая.

Столбец (6) дает при каждом значении k ожидаемую потерю, если вместо оптимального решения использовать решение, эквивалентное детерминированному случаю ω_{ce} . Как показывает столбец (7), в котором приведены значения относительного увеличения потери, ожидаемой при использовании ω_{ce} , при больших k потеря может возрасти на 55%.

Чтобы получить дополнительное подтверждение этих результатов, та же процедура была применена к другому набору данных (см. [182, с. 282]). А именно, этот набор ($T = 15$) данных генерировался простой регрессионной моделью

$$y_t = 2,0x_t + \varepsilon_t \quad (t = 1, 2, \dots, 15),$$

где величины ε_t брались независимо друг от друга из нормально распределенной совокупности с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2 = 9$, а величины x_t также независимо были взяты из нормального распределения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2 = 0,64$. Кроме того, были вычислены следующие выборочные статистики: $\hat{\beta} = 1,5885$, $s^2 = 5,7351$, $\nu = 14$ и $\sum_{t=1}^T x_t^2 = 8,4079$.

Результаты, полученные при анализе этой модели, аналогичные результатам анализа модели прироста объема денежной массы (см. табл. 17), приведены в табл. 18. На основании содержащихся в ней данных можно сделать те же выводы, что и при рассмотрении табл. 17, а именно что при заметных отклонениях от симметричного случая решение, ω_q , соответствующее квадратичной функции потерь, дает существенное увеличение ожидаемой потери и что решение, ω_{ce} , эквивалентное детерминированному случаю, при больших значениях k дает еще больший сдвиг величины ожидаемой потери.

Т а б л и ц а 18

Значения управляющего параметра, ожидаемая потеря и относительная ожидаемая потеря в модели, соответствующей данным Зельнера—Гайзеля

Параметр асимметрии k (1)	Оптимальное значение $\hat{\omega} = \omega^*$ (2)	Ожидаемая потеря при $\hat{\omega} = \omega^*$ (3)	Ожидаемая потеря при $\hat{\omega} = \omega^q$ (4)	(4) — (3)	Ожидаемая потеря при $\hat{\omega} = \omega_{ce}$ (6)	(6) — (3)
				(3)		(3)
				(5)		(7)
0,25	2,7512	7,2569	8,3515	0,1508	7,3356	0,01084
0,50	2,3149	8,7129	9,0767	0,04175	8,8027	0,01031
0,75	2,0766	9,7274	9,8019	0,007659	10,270	0,00578
1,0	1,9144	10,527	10,527	0,0000	11,737	0,1059
1,5	1,6943	11,776	11,978	0,01715	14,671	0,2535
2,0	1,5437	12,755	13,428	0,05276	17,605	0,3802
3,0	1,3388	14,277	16,330	0,14380	23,474	0,6442

9.5. n -МЕРНЫЕ КВАДРАТИЧНЫЕ СПЛАЙНОВЫЕ ФУНКЦИИ ПОТЕРЬ

До настоящего момента при рассмотрении квадратичных сплайновых функций потерь мы сосредоточивали наше внимание на функциях потерь, зависящих от одной переменной, или же на функциях по-

терь, которые являются суммой одномерных квадратичных сплайновых функций потерь. В этом разделе мы обобщим понятие одномерной квадратичной функции потерь на случай n измерений и разрешим различным входящим в нее переменным взаимодействовать. Как мы увидим, существует связь между допустимыми типами асимметрии и свойством непрерывности различных частных производных функции потерь. В разделе 9.6 мы проиллюстрируем возможности применения биквадратичных (двумерных) сплайновых функций потерь. А именно мы расширим — путем добавления еще одной управляющей переменной — простую модель национального дохода, уже рассматривавшуюся нами в разделе 9.2.

Пусть $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]'$ — вектор переменных, которому отвечает вектор соответствующих целевых значений $\mathbf{x}^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]'$. Далее введем симметричную положительно-определенную матрицу

$$A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

где при заданных величинах $\alpha_i^{(1)}$ и $\alpha_i^{(2)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) диагональные элементы определяются следующим образом:

$$a_{ii} = \begin{cases} \alpha_i^{(1)}, & \text{если } x_i \leq x_i^*; \\ \alpha_i^{(2)}, & \text{если } x_i > x_i^* \end{cases} \quad (20)$$

и, при заданных $\alpha_{ij}^{(1)}$, $\alpha_{ij}^{(2)}$, $\alpha_{ij}^{(3)}$, $\alpha_{ij}^{(4)}$, недиагональные элементы полагаются равными ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = i + 1, i + 2, \dots, n$):

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij}^{(1)}, & \text{если } x_i \leq x_i^* \text{ и } x_j \leq x_j^*; \\ \alpha_{ij}^{(2)}, & \text{если } x_i > x_i^* \text{ и } x_j > x_j^*; \\ \alpha_{ij}^{(3)}, & \text{если } x_i > x_i^* \text{ и } x_j \leq x_j^*; \\ \alpha_{ij}^{(4)}, & \text{если } x_i \leq x_i^* \text{ и } x_j > x_j^*. \end{cases} \quad (21)$$

Тогда функция потерь

$$L(\mathbf{x}; \mathbf{x}^*) = [\mathbf{x} - \mathbf{x}^*]' A(\mathbf{x}; \mathbf{x}^*) [\mathbf{x} - \mathbf{x}^*] \quad (22)$$

обладает свойством, в соответствии с которым величина потери асимметрична как по каждой из переменных, так и в зависимости от их замены одна на другую.

Хотя функция $L(\mathbf{x}; \mathbf{x}^*)$ и является «полностью» асимметричной, она тем не менее непрерывна. Чтобы убедиться в этом, перепишем выражение (22) в виде

$$L(\mathbf{x}; \mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^n a_{ii} (x_i - x_i^*)^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n a_{ij} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*). \quad (23)$$

Очевидно, что во всех точках $\mathbf{x}^0 = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0]$, таких, что $x_i^0 \neq x_i^*$ ($i = 1, 2, \dots, n$), функция непрерывна. Случай, когда одна из компонент вектора \mathbf{x} совпадает со своим целевым значением, требует осо-

бого рассмотрения, поскольку согласно определениям (20) и (21) коэффициенты являются ступенчатыми функциями с возможными точками разрыва в целевых значениях. Однако при $x_i = x_i^*$ соответствующие одночлены в правой части (23) обращаются в нуль, и, следовательно, этими точками разрыва можно пренебречь (откуда и вытекает, что функция $L(x; x^*)$ непрерывна при всех $x \in \mathbf{R}^n$).

Если на $L(x; x^*)$ наложить дополнительные условия гладкости в форме требования непрерывности тех или иных ее частных производных, то это приведет к определенным ограничениям на допустимые типы асимметрии. Продифференцируем (23) по x_k и подставим в полученное выражение точку x^0 . Получим функцию

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} \Big|_{x=x^0} = \sum_{i=1}^n a_{ki} (x_i^0 - x_i^*),$$

которая, очевидным образом, непрерывна. Пусть $x_j^* = [x_1^*, \dots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \dots, x_n^*]$ ($x_j \neq x_j^*$). Тогда из (21) следует, что производная $\partial L / \partial x_k$ непрерывна тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} \Big|_{x=x_j^*} = \begin{cases} 2\alpha_{kj}^{(1)} (x_j - x_j^*) = 2\alpha_{kj}^{(3)} (x_j - x_j^*), & \text{если } x_j < x_j^*; \\ 2\alpha_{kj}^{(2)} (x_j - x_j^*) = 2\alpha_{kj}^{(4)} (x_j - x_j^*), & \text{если } x_j > x_j^*, \end{cases}$$

т. е. тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \alpha_{ij}^{(1)} = \alpha_{kj}^{(3)} & \text{при } x_j < x_j^*; \\ \alpha_{kj}^{(2)} = \alpha_{kj}^{(4)} & \text{при } x_j > x_j^*. \end{cases} \quad (24)$$

Отсюда (объединяя (21) и (24)) видим, что величины a_{ki} ($i = 1, 2, \dots, n; i \neq k$) не зависят от x_k . Таким образом, $\partial L / \partial x_k$ непрерывна при всех $x \in \mathbf{R}^n$, поскольку во всех возможных точках разрыва, в которых $x_i = x_i^*$, соответствующие члены суммы (23) обращаются в нуль. Следовательно, имеет место следующая теорема.

Теорема 9.1. $\partial L / \partial x_k$ непрерывна при всех $x \in \mathbf{R}^n$ тогда и только тогда, когда $\alpha_{kj}^{(1)} = \alpha_{kj}^{(3)}$ и $\alpha_{kj}^{(2)} = \alpha_{kj}^{(4)}$ ($j = 1, 2, \dots, n; j \neq k$).

Иными словами, теорема 9.1 утверждает, что частная производная $L(x)$ по x_k непрерывна в том и только в том случае, когда асимметрия коэффициентов потери от взаимодействия a_{kj} ($j = 1, 2, \dots, n; j \neq k$) зависит только от того, лежит ли каждое значение x_j выше или ниже целевого значения этой переменной, но не от того, лежит ли x_k выше или ниже своего желаемого уровня, как это было в общем случае (21). Применяя теорему 9.1 к производной $\partial L / \partial x_i$ ($i \neq k$), получаем следующий результат.

Теорема 9.2. Если производные $\partial L / \partial x_k$ и $\partial L / \partial x_i$ ($k \neq i$) обе непрерывны, то ⁷

$$\alpha_{ki}^{(1)} = \alpha_{ki}^{(2)} = \alpha_{ki}^{(3)} = \alpha_{ki}^{(4)}.$$

⁷ Утверждение, обратное к теореме 9.2, вообще говоря, не верно. Правильная формулировка такова: если $\alpha_{kj}^{(1)} = \alpha_{kj}^{(3)}$, $\alpha_{kj}^{(2)} = \alpha_{kj}^{(4)}$ ($j = 1, 2, \dots, n; j \neq k$) и $\alpha_{ij}^{(1)} = \alpha_{ij}^{(3)}$, $\alpha_{ij}^{(2)} = \alpha_{ij}^{(4)}$ ($j = 1, 2, \dots, n; j \neq i$), то обе производные $\partial L / \partial x_k$ и $\partial L / \partial x_i$ ($i \neq k$) непрерывны.

Из теоремы 9.2 следует, что достаточно непрерывности двух частных производных, чтобы исключить асимметрию соответствующего коэффициента при члене взаимодействия функции потерь. Это утверждение эквивалентно тому, что если коэффициент a_{ki} при члене взаимодействия несимметричен, то одна или обе частные производные $\partial L/\partial x_k$ и $\partial L/\partial x_i$ должны быть непрерывны.

Так как минимизацию функции потерь удобно проводить при условии непрерывности всех ее частных производных, интересно рассмотреть случай, когда все частные производные непрерывны. Применение теоремы 9.2 дает следующий результат.

Теорема 9.3. $\partial L/\partial x_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) непрерывны тогда и только тогда, когда

$$\alpha_{ij}^{(1)} = \alpha_{ij}^{(2)} = \alpha_{ij}^{(3)} = \alpha_{ij}^{(4)} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j).$$

Теорема 9.3 утверждает, что все частные производные непрерывны в том и только в том случае, когда все коэффициенты при членах взаимодействия функции потерь симметричны. Таким образом, все частные производные непрерывны, если и только если разрешенным является лишь один тип асимметрии, а именно асимметрия коэффициентов функции потерь, лежащих на главной диагонали матрицы $\mathbf{A}(\mathbf{x})$. Тогда функцию $L(\mathbf{x}; \mathbf{x}^*)$ можно разбить на сумму простых одномерных квадратичных сплайновых функций потерь

$$L_i(x_i; x_i^*) = \begin{cases} \alpha_i^{(1)}(x_i - x_i^*)^2, & \text{если } x_i \leq x_i^* \\ \alpha_i^{(2)}(x_i - x_i^*)^2, & \text{если } x_i > x_i^* \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

и сумму симметричных смешанных членов (членов взаимодействия), т. е.

$$L(\mathbf{x}; \mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^n L_i(x_i; x_i^*) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n a_{ij}(x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*). \quad (25)$$

По определению, функция $L(\mathbf{x}; \mathbf{x}^*)$, имеющая вид (25), есть n -мерная квадратичная сплайновая функция потерь.

Что касается частных производных второго порядка, то (так как $\partial^2 L/\partial x_i \partial x_j = a_{ij}$, $i \neq j$) из теорем 9.1 и 9.3 тривиально вытекает следующее утверждение.

Теорема 9.4. $\partial L/\partial x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) непрерывны тогда и только тогда, когда $\partial^2 L/\partial x_i \partial x_j$ ($i \neq j$; $i, j = 1, 2, \dots, n$) непрерывны.

Частная производная второго порядка, взятая по одной и той же переменной $\partial^2 L/\partial x_i^2$, будет непрерывна в том и только в том случае, когда $\alpha_i^{(1)} = \alpha_i^{(2)}$. Таким образом, существует следующее свойство эквивалентности между полной непрерывностью и симметрией.

Теорема 9.5. Функция $L(\mathbf{x}; \mathbf{x}^*)$ и все ее частные производные первого и второго порядка непрерывны тогда и только тогда, когда $L(\mathbf{x}; \mathbf{x}^*)$ есть обычная симметричная функция потерь.

Итак, в этом разделе мы рассмотрели класс n -мерных асимметричных функций потерь и показали эквивалентность различных свойств

непрерывности и симметрии. Для практических целей, по-видимому, подходящий компромисс между непрерывностью и асимметрией дается n -мерной квадратичной сплайновой функцией потерь. В этом случае разрывными являются только частные производные второго порядка, взятые по одной и той же переменной⁸, что дает довольно большую степень асимметрии, причем за счет введения всего n дополнительных (по сравнению с обычной симметричной функцией потерь) параметров. Если, однако, целесообразно ввести асимметрию в члены взаимодействия функции потерь, приходится согласиться с наличием большего числа точек разрыва. Само по себе это не является серьезным недостатком, так как точки разрыва лежат в целевых значениях, однако спецификация дополнительного числа параметров может оказаться затруднительной. В частности, полностью асимметричный случай включает на $n + 3/2 [n(n - 1)]$ параметров больше, чем обычная симметричная функция потерь.

9.6. БИКВАДРАТИЧНЫЕ СПЛАЙНОВЫЕ ФУНКЦИИ ПОТЕРЬ

Чтобы получить конкретное представление о смысле результатов предыдущего раздела, рассмотрим двумерный вариант функции потерь (25), когда она называется *биквадратичной сплайновой функцией потерь*. Кроме того, рассмотрим в качестве иллюстрации простую модель национального дохода из раздела 9.2, но с добавлением еще одной управляющей переменной (налог на совокупный доход). А именно положим

$$Y = C + I + G;$$

$$C = c(Y - T), \quad c \neq 1, \quad (26)$$

где Y — эндогенная переменная, описывающая национальный доход, C — эндогенная переменная, описывающая потребление, I — экзогенные частные инвестиции (которые считаются случайной величиной с заданным математическим ожиданием $E(I)$ и конечной дисперсией), G и T — государственные расходы и величина налогообложения (каждая из них является управляющей переменной). Все эти величины исчисляются (в постоянных ценах) в долларах в год. Коэффициент c — предельная склонность к потреблению (которая считается известной)⁹.

В качестве функции общественных потерь рассмотрим выражение

$$\tilde{L}(Y, G, T; Y^*, C^*, T^*) = \delta(Y - Y^*)^2 + L(G, T; G^*, T^*), \quad (27)$$

⁸ Частные производные второго порядка $\partial^2 L / \partial x_i^2$ ($i = 1, 2, \dots, n$) разрывны только в точках, соответствующих целевым значениям x_i^* ($i = 1, 2, \dots, n$); другими словами, они являются ступенчатыми функциями, которые претерпевают скачки в соответствующих целевых значениях. Кроме того, поскольку n -мерные квадратичные сплайновые функции потерь имеют непрерывные частные производные первого порядка, они дают линейные решающие правила.

⁹ В силу предположения, что величина c известна, приводимые здесь результаты тоже относятся к случаю, «эквивалентному детерминированности».

которое есть сумма обычной квадратичной функции потерь и биквадратичной сплайновой функции потерь.

$$L(G, T; G^*, T^*) = \begin{cases} [G-G^*, T-T^*] \begin{bmatrix} \alpha_1 \gamma \\ \gamma \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G-G^* \\ T-T^* \end{bmatrix}, & G \leq G^* \\ [G-G^*, T-T^*] \begin{bmatrix} \alpha_1 \gamma \\ \gamma \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G-G^* \\ T-T^* \end{bmatrix}, & T > T^* \\ [G-G^*, T-T^*] \begin{bmatrix} \alpha_2 \gamma \\ \gamma \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G-G^* \\ T-T^* \end{bmatrix}, & G > G^* \\ [G-G^*, T-T^*] \begin{bmatrix} \alpha_2 \gamma \\ \gamma \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G-G^* \\ T-T^* \end{bmatrix}, & T > T^* \end{cases} \quad (28)$$

где Y^* , G^* и T^* — целые значения национального дохода, государственных расходов и налогообложения соответственно¹⁰.

Использование в качестве первого слагаемого обычной квадратичной функции потерь предполагает, что явления инфляции (рассматриваемой как следствие избыточного совокупного спроса) и безработицы (трактуемой как следствие недостаточного спроса) оцениваются симметричным образом. Такая ситуация, однако, не наблюдается для целевого значения государственных расходов G^* , которые определяются исключительно требованиями государственных ведомств и служб (а не соображениями стабильности), и для желаемого уровня налогообложения T^* . Поэтому вид нашей функции $L(G, T; G^*, T^*)$ указывает на то, что чрезмерность государственных расходов и налогообложения, а также недостаточность государственных расходов и налогообложения не рассматриваются как симметричные явления. Наличие такой асимметрии может служить отражением различных общественно-политических точек зрения как на роль правительства, так и на разумный уровень налогообложения.

Решая структурные уравнения (28) относительно Y , получаем

$$Y = \frac{I + G - cT}{1 - c}. \quad (29)$$

Ожидаемая величина потерь для (27) равна

$$E(\tilde{L}) = \delta [\text{var}(Y) + \{Y^* - E(Y)\}^2] + L(G, T; G^*, T^*), \quad (30)$$

где $\text{var}(Y) = (1 - c)^{-2} \text{var}(I)$ и $E(Y) = [G - cT + E(I)] / (1 - c)$. Минимизация выражения (30) по управляющим переменным G и T дает следующие условия первого порядка:

$$\frac{\partial E(\tilde{L})}{\partial G} = \frac{-2\delta}{1 - c} \left[Y^* - \frac{G - cT + E(I)}{1 - c} \right] +$$

¹⁰ Обозначения параметров функции потерь в (28) несколько отличаются от принятых ранее в этой главе. Так как здесь рассматривается только двумерный случай, это изменение обозначений дает возможность избавиться от большого числа громоздких индексов. Естественно, что каждая из (2×2) -матриц в (28) предполагается положительно-определенной.

$$+ 2 \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 (G - G^*) + \gamma (T - T^*), \text{ если } G \leq G^* \\ \alpha_2 (G - G^*) + \gamma (T - T^*), \text{ если } G > G^* \end{array} \right\} = 0; \quad (31)$$

$$\frac{\partial E(\tilde{L})}{\partial T} = \frac{2\delta c}{1-c} \left[Y^* - \frac{G - cT + E(I)}{1-c} \right] +$$

$$+ 2 \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 (T - T^*) + \gamma (G - G^*), \text{ если } T \leq T^* \\ \beta_2 (T - T^*) + \gamma (G - G^*), \text{ если } T > T^* \end{array} \right\} = 0. \quad (32)$$

Решая систему уравнений (31) и (32) относительно управляющих переменных, получаем:

$$G = \frac{\delta(\beta_j + c\gamma) [(1-c)Y^* - E(I) + cT^*] + [(\alpha_i \beta_j - \gamma^2)(1-c)^2 + \delta c(\alpha_i + c\gamma)] G^*}{(\alpha_i \beta_j - \gamma^2)(1-c)^2 + \delta[\beta_j + c(\alpha_i + 2\gamma)]}; \quad (33)$$

$$T = \frac{-\delta(c\alpha_i + \gamma) [(1-c)Y^* - E(I) - G^*] + [(\alpha_i \beta_j - \gamma^2)(1-c)^2 + \delta c(\beta_j + c\gamma)] T^*}{(\alpha_i \beta_j - \gamma^2)(1-c)^2 + \delta[\beta_j + c(\alpha_i + 2\gamma)]}, \quad (34)$$

где $i = 1$ или 2 и $j = 1$ или 2 . Это решение дает единственную точку минимума, так как $E(\tilde{L})$ есть строго выпуклая функция от G и T . Последнее утверждение — следствие того, что она является суммой двух строго выпуклых функций от G и T .

9.7. АСИММЕТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ ЧАСТИЧНОЙ АДАПТАЦИИ

В теории потребительского спроса уравнения поведения, а именно уравнения расходов, выводятся путем максимизации некоторой неслучайной функции полезности. Если при этом функциональный вид функции полезности «разумен», то обычно считается, что соответствующие уравнения поведения будут теоретически обоснованными.

Аналогично при изучении механизмов адаптации об адекватности модели частичной адаптации часто судят на основе того, что она описывается уравнением поведения, полученным путем минимизации определенной функции издержек («отрицательной» полезности) «разумного» вида. Пусть, например, y_t представляет собой значение переменной y в момент t и пусть y_t^* обозначает соответствующий этой переменной «желаемый» уровень. Тогда при $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ функция издержек

$$C = \alpha (y_t - y_t^*)^2 + \delta (y_t - y_{t-1})^2 \quad (35)$$

описывает последствия того, что в момент времени t значение переменной y будет равным величине y_t при условии, что ее желаемый уровень есть y_t^* и что ее значение в предшествующий момент времени было равно y_{t-1} . Первое слагаемое в правой части (35) дает меру «издержек отклонения от положения равновесия», т. е. издержки, связанные с

отклонением от желаемого уровня. Второе слагаемое (35) измеряет «издержки управления», т. е., иными словами, оно показывает, во сколько обходится операция замены предыдущего значения y_{t-1} новым значением y_t .

Минимизация функции (35) по y_t приводит к модели частичной адаптации, описываемой уравнением

$$y_t = y_{t-1} + \frac{\alpha}{\alpha + \delta} (y_t^* - y_{t-1}), \quad (36)$$

где коэффициент адаптации $\alpha / (\alpha + \delta)$ зависит от отношения предельных издержек отклонения от положения равновесия к предельным издержкам изменения уровня. Если y_t и y_t^* представлены в логарифмическом виде, то $\alpha / (\alpha + \delta)$ дает эластичность адаптации.

Фейдж [57, с. 466] приводит простой вариант применения функции издержек (35) и соответствующего механизма частичной адаптации (36) в задаче, касающейся финансовых вопросов¹¹. А именно он обозначает через y_t логарифм величины спроса на имеющийся в данный момент реальный запас наличных денег, а через y_t^* — логарифм величины желаемой в перспективе денежной массы. В этом случае первое слагаемое в правой части (35) говорит о том, что если реальный запас наличных денег превышает уровень, желаемый в перспективе, то приходится считаться с издержками упущенного дохода. Аналогично, если реальный запас в данный момент будет меньше, чем уровень, желаемый в перспективе, то необходимо учесть издержки, связанные с недостаточностью запаса наличных денег. Второе слагаемое в (35) описывает издержки, соответствующие расходам на брокерские операции, и прочие расходы на проведение сделок и операций, соответствующих общей величине изменения портфеля ценностей.

В большинстве приложений желаемый уровень y_t^* в (36) не является наблюдаемой величиной. Один из способов исправить это положение заключается в том, чтобы связать y_t^* с некоторой наблюдаемой величиной. Мы здесь будем предполагать, что

$$y_t^* = \gamma x_{t-1}, \quad (37)$$

где x_{t-1} — наблюдаемая переменная, а γ — неизвестный параметр¹². В уравнение (37) введено запаздывание на один период, и это отражает тот факт, что переход от $(t-1)$ к моменту времени t приходится

¹¹ Аналогичные исследования можно найти в работе [80] в применении к анализу накопления капитала и в работе [45] в связи с теорией инвестиционных расходов.

¹² Требование, чтобы уравнение (37) не имело вероятностного характера, связано с необходимостью минимизации функции издержек (35). Если y_t^* — случайная величина, то уравнение (35) будет стохастическим и минимизировать придется ожидаемые издержки. Поскольку функция издержек (35) симметрична по y_t^* , стохастический вариант определения y_t^* не вызовет никаких затруднений. Это, однако, не имеет места для асимметричной функции издержек (39). Во всяком случае, спецификация (37) совпадает со спецификацией Уода [175], и мы будем рассматривать здесь только этот случай.

проводить, базируясь на информации, имеющейся в момент $(t - 1)$. Подставляя (37) в (36), получаем уравнение частичной адаптации (38):

$$y_t = y_{t-1} + \frac{\alpha}{\alpha + \delta} (\gamma x_{t-1} - y_{t-1}), \quad (38)$$

в которое входят только наблюдаемые переменные.

Нетрудно представить себе ситуацию, в которой издержки отклонения от положения равновесия и издержки перехода следует считать асимметричными. В случае издержек отклонения от равновесия в указанном примере Фейджа весьма вероятно, что разные люди будут оценивать издержки упущенного дохода ($y_t > y_t^*$) и издержки, связанные с недостаточностью запаса наличных денег ($y_t < y_t^*$), по-разному (т. е. приписывать им разные веса). Аналогично, учитывая, что деньги являются «товаром» многоцелевого назначения (например, средством накопления и средством деловых расчетов), «издержки управления» также вполне могут оказаться асимметричными.

С учетом этих соображений определим функцию издержек (35) следующим образом:

$$C = L_1(y_t; y_t^*) + L_2(y_t; y_{t-1}), \quad (39)$$

где L_1 и L_2 — квадратичные сплайновые функции издержек (потерь);

$$L_1(y_t; y_t^*) = \begin{cases} \alpha_1 (y_t - y_t^*)^2, & \text{если } y_t \leq y_t^*; \\ \alpha_2 (y_t - y_t^*)^2, & \text{если } y_t > y_t^*; \end{cases} \quad (40)$$

$$L_2(y_t; y_{t-1}) = \begin{cases} \delta_1 (y_t - y_{t-1})^2, & \text{если } y_t \leq y_{t-1}; \\ \delta_2 (y_t - y_{t-1})^2, & \text{если } y_t > y_{t-1}, \end{cases} \quad (41)$$

а $\alpha_1, \alpha_2, \delta_1$ и δ_2 — положительные параметры.

Минимизируя функцию (39) по y_t , можно получить асимметричную модель частичной адаптации, описываемую уравнением

$$y_t = y_{t-1} + \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \delta_j} (y_t^* - y_{t-1}), \quad (42)$$

что эквивалентно

$$y_t = y_t^* + \frac{\delta_j}{\alpha_i + \delta_j} (y_{t-1} - y_t^*), \quad (43)$$

где

$$i = \begin{cases} 1, & \text{если } y_t \leq y_t^*; \\ 2, & \text{если } y_t > y_t^*; \end{cases} \quad (44)$$

$$j = \begin{cases} 1, & \text{если } y_t \leq y_{t-1}; \\ 2, & \text{если } y_t > y_{t-1}. \end{cases} \quad (45)$$

На первый взгляд может показаться, что возможны четыре различные комбинации индексов i и j . Однако двух из них на самом деле быть не может. Из уравнения (42) видно, что $y_t^* \leq y_{t-1}$ тогда и только тогда,

когда $y_t \leq y_{t-1}$ и, следовательно (учитывая соотношение (45)), тогда и только тогда, когда $j = 1$. Аналогично из уравнения (43) видно, что $y_t^* < y_{t-1}$ в том и только в том случае, если $y_t > y_t^*$ и, следовательно, тогда и только тогда, когда $i = 2$. Тем самым в действительности реализуются только две следующие комбинации индексов:

$$\begin{aligned} i=2 \text{ и } j=1 \text{ тогда и только тогда, когда } y_t^* < y_{t-1}; \\ i=1 \text{ и } j=2 \text{ тогда и только тогда, когда } y_t^* \geq y_{t-1}. \end{aligned} \quad (46)$$

Интуитивный смысл соотношений (46) весьма прост. Как указывает сам термин «частичная адаптация», истинное значение y_t , задаваемое формулой (42), будет лежать где-то между предшествующим значением y_{t-1} и желаемым уровнем y_t^* . Это отражает компромисс между издержками отклонения от равновесия и издержками управления. Оптимальное значение y_t не может быть строго больше величины y_{t-1} и величины y_t^* одновременно. Действительно, в этом случае, несколько сдвинув значение y_t в направлении y_{t-1} и y_t^* , можно было бы уменьшить величину общих издержек, что противоречит предположению об оптимальности y_t .

Объединяя соотношения (41) и (46), можно переписать уравнение (42), характеризующее механизм частичной адаптации, следующим образом:

$$y_t = y_{t-1} + \begin{cases} \beta_1 (\gamma x_{t-1} - y_{t-1}), & \text{если } y_{t-1} \leq \gamma x_{t-1}; \\ \beta_2 (\gamma x_{t-1} - y_{t-1}), & \text{если } y_{t-1} > \gamma x_{t-1}. \end{cases} \quad (47)$$

Здесь параметры адаптации определяются так:

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \delta_2} \text{ и } \beta_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \delta_1}.$$

Уравнение (47) сводится к уравнению, описывающему обычный симметричный механизм частичной адаптации (38), когда $\beta_1 = \beta_2$, т. е. когда $\alpha_1/\alpha_2 = \delta_2/\delta_1$. Это условие тривиальным образом выполнено, когда обе функции L_1 и L_2 симметричны, а также когда асимметрия функции L_1 «компенсирует» асимметрию L_2 , т. е. когда отношение потери, возникающей из-за того, что значение y_t меньше, чем y_t^* , к потере от превышения y_t^* равно отношению потери от превышения y_{t-1} к потере, возникающей в результате того, что значение y_t оказывается меньше y_{t-1} .

Последствия того, что ни издержки отклонения от равновесия, ни издержки управления не считаются симметричными и не компенсируются, довольно очевидны. А именно уравнению (47) будут соответствовать два различных темпа адаптации. Кроме того, поскольку соотношение $\beta_1 \neq \beta_2$ может быть следствием асимметрии L_1 или L_2 или обеих функций одновременно, наблюдаемая асимметрия в поведении, описываемом моделью (47), указывает только на то, что функция (39) асимметрична, но ничего не говорит о природе этой асимметрии.

Интересно отметить, что, так как функция издержек (39) является суммой двух квадратичных сплайновых функций издержек, функция, описывающая механизм частичной адаптации (47), будет линейным

сплайном, зависящим от y_{t-1} , с единственным узлом в точке y_t^* . Это графически показано на рис. 9.3 для $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\delta_1 = 6$ и $\delta_2 = 1$.

Что касается оценивания, то добавим к уравнениям (47) независимый возмущающий член $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ ($t = 1, 2, \dots, n$). Тогда логарифмическая функция правдоподобия будет иметь вид

$$L(\beta_1, \beta_2, \gamma, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{t \in I_1} \{y_t - y_{t-1} - \beta_1(\gamma x_{t-1} - y_{t-1})\}^2 + \sum_{t \in I_2} \{y_t - y_{t-1} - \beta_2(\gamma x_{t-1} - y_{t-1})\}^2 \right], \quad (48)$$

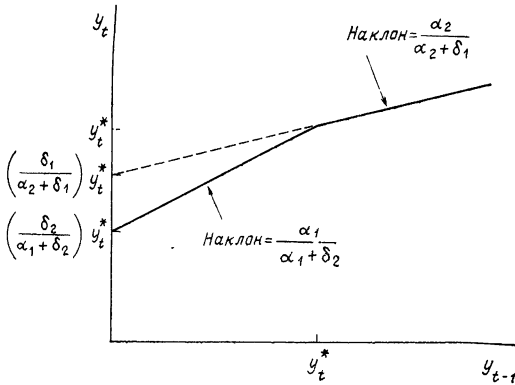


Рис. 9.3. Линейная сплайновая модель частичной адаптации

где I_1 и I_2 — наборы индексов, каждому из которых соответствуют те наблюдения, для которых $y_{t-1} \leq \gamma x_{t-1}$ и $y_{t-1} > \gamma x_{t-1}$ соответственно. При заданном γ функцию (48) можно максимизировать по β_1 , β_2 и σ^2 и получить условные оценки метода наибольшего правдоподобия:

$$\hat{\beta}_1(\gamma) = \frac{\sum_{t \in I_1} (y_t - y_{t-1})(\gamma x_{t-1} - y_{t-1})}{\sum_{t \in I_1} (\gamma x_{t-1} - y_{t-1})^2};$$

$$\hat{\beta}_2(\gamma) = \frac{\sum_{t \in I_2} (y_t - y_{t-1})(\gamma x_{t-1} - y_{t-1})}{\sum_{t \in I_2} (\gamma x_{t-1} - y_{t-1})^2};$$

$$\hat{\sigma}^2(\gamma) = \frac{1}{n} \left[\sum_{t \in I_1} \{y_t - y_{t-1} - \hat{\beta}_1(\gamma)(\gamma x_{t-1} - y_{t-1})\}^2 + \sum_{t \in I_2} \{y_t - y_{t-1} - \hat{\beta}_2(\gamma)(\gamma x_{t-1} - y_{t-1})\}^2 \right],$$

а также «концентрированную» логарифмическую функцию правдоподобия

$$L(\gamma) = -\left[\frac{n}{2} \left[1 + \ln(2\pi) + \ln \hat{\sigma}^2(\gamma) \right] \right]. \quad (49)$$

Функцию (49) можно максимизировать простым методом поиска на решетке, соответствующей значениям γ ¹³.

Хотя оценки величин $\hat{\gamma}$, $\beta_1(\hat{\gamma})$, $\beta_2(\hat{\gamma})$ и $\hat{\sigma}^2(\hat{\gamma})$, отвечающие методу наибольшего правдоподобия, вычисляются довольно легко, определить их статистические свойства не так просто. Как и во многих моделях, рассмотренных нами в главе 7, стандартные условия регулярности, требуемые методом наибольшего правдоподобия, не выполняются. В частности, функции (48) и (49) недифференцируемы по γ в точках y_t/x_t ($t = 0, 1, \dots, n - 1$), где значения наблюдаемых величин переходят из одного режима в другой. Мы не располагаем здесь доказательством, но можно высказать *предположения*, что оценки метода наибольшего правдоподобия γ , β_1 и β_2 являются состоятельными и асимптотически нормальными. Эти предположения основываются на результатах Федера [54], хотя рассмотренная им модель и несколько отличается от нашей. Эти отличия состоят в следующем.

Во-первых, работа Федера не включает случай, когда в правую часть уравнения входит запаздывающая зависимая переменная. Мы предполагаем, что доказательство пройдет и в этом случае, при условии, что возмущающий член будет по-прежнему вести себя хорошо (т. е. что будет отсутствовать автокорреляция возмущений).

Во-вторых, как мы уже говорили, уравнение поведения (47) включает линейный сплайн с объясняемой переменной y_t , объясняющей переменной y_{t-1} и узлом в точке $y_t^* = \gamma x_{t-1}$ и изменяется при переходе от одного периода к следующему. Разделив вероятностный вариант уравнения (47) на x_{t-1} , получим

$$\frac{y_t}{x_{t-1}} = \left\{ \begin{array}{l} \beta_1\gamma + (1 - \beta_1) \left(\frac{y_{t-1}}{x_{t-1}} \right), \text{ если } \frac{y_{t-1}}{x_{t-1}} \leq \gamma \\ \beta_2\gamma + (1 - \beta_2) \left(\frac{y_{t-1}}{x_{t-1}} \right), \text{ если } \frac{y_{t-1}}{x_{t-1}} > \gamma \end{array} \right\} + \frac{\varepsilon_t}{x_{t-1}}. \quad (50)$$

Уравнение (50) является линейным сплайном с объясняемой переменной (y_t/x_{t-1}) , объясняющей переменной (y_{t-1}/x_{t-1}) и узлом в точке γ . Представление (50) аналогично модели Федера, но возмущающий член является гетероскедастическим. Как мы считаем, можно сделать предположение, что при максимизации функций (48) или (49), в которых гетероскедастичность была устранена, результаты Федера останутся справедливыми.

Наконец, уравнение (42) должно быть, конечно, хорошо идентифицировано в смысле определения, сформулированного Федером. Следовательно, величина $\hat{\gamma}$ должна лежать в пределах от $\min(y_{t-1}/x_{t-1})$ до $\max(y_{t-1}/x_{t-1})$.

Альтернативой изложенному варианту применения метода наибольшего правдоподобия является, конечно, байесовский подход — аналогичный рассмотренному нами в разделе 7.4. При этом информа-

¹³ См. [128, глава 8], где описывается один случай практического применения этого подхода.

тивные априорные распределения целесообразно использовать не только для γ , но и для β_1 и β_2 . С их помощью можно принять во внимание априорные теоретические соображения, указывающие на то, что оба параметра адаптации лежат между нулем и единицей.

9.8. ПРИЛОЖЕНИЕ

Для того чтобы вывести формулу (19), нам понадобятся следующие определения и леммы.

Определение 9.1. Пусть x есть случайная величина с плотностью распределения $f(x)$ и пусть x_0 — некоторое действительное число из множества значений, которые может принимать x . Тогда *неполным моментом n -го порядка* величины x называется математическое ожидание величины x^n на промежутке $(-\infty, x_0)$, т. е.

$$E_{-\infty}^{x_0}(x^n) \equiv \int_{-\infty}^{x_0} x^n f(x) dx.$$

Лемма 9.1. Если распределение величины t есть t -распределение Стьюдента с $\nu > 1$ степенями свободы, то

$$E_{-\infty}^{t_0}(t) = -\left(\frac{\nu + t_0^2}{\nu - 1}\right) f(t_0),$$

где $f(t_0)$ — значение функции плотности t -распределения Стьюдента в точке t_0 .

Доказательство. Получается прямым интегрированием.

Лемма 9.2. В условиях леммы 9.1

$$E_{-\infty}^{t_0}(t^n) = \frac{1}{n - \nu} [t_0^{n-1} (\nu + t_0^2) f(t_0) - (n - 1) \nu E_{-\infty}^{t_0}(t^{n-2})]$$

при $n < \nu$ (в противном случае величина $E_{-\infty}^{t_0}(t^n)$ не будет сходящейся).

Доказательство. См. [178, с. 293—294].

Следствие. При $n = 2$

$$E_{-\infty}^{t_0}(t^2) = \frac{1}{2 - \nu} [t_0 (\nu + t_0^2) f(t_0) - \nu F(t_0)],$$

где $F(t_0)$ — значение функции t -распределения Стьюдента в точке t_0 .

Пользуясь определением (17) функции $L(z; z^*)$, получаем

$$\begin{aligned} E[L(z; z^*)] &= \int_{-\infty}^{\infty} L(z; z^*) p(z|y, \omega) dz = E_{-\infty}^{z^*}(z - z^*)^2 + \\ &+ k E_{-\infty}^{z^*}(z - z^*)^2 = k E(z - z^*)^2 + (1 - k) E_{-\infty}^{z^*}(z - z^*)^2 = k E(z - z^*)^2 + \\ &+ (1 - k) [E_{-\infty}^{z^*}(z^2) - 2z^* E_{-\infty}^{z^*}(z) + (z^*)^2 F(z^*)]. \end{aligned} \quad (51)$$

Для того чтобы вычислить входящие в выражение (51) неполные моменты, следует заменить z переменной t , имеющей распределение Стьюдента, что даст нам возможность применить леммы 9.1 и 9.2. Вос-

пользовавшись описанной в разделе 9.3 функцией плотности для z , легко показать, что величина $t = \sqrt{g} (z - \hat{\beta} \omega)$ имеет t -распределение Стьюдента с ν степенями свободы. Отсюда следует, что

$$E z_{-\infty}^* (z) = g^{-1/2} E_{-\infty}^{t_0} (t) + \hat{\beta} \omega F (t_0) \quad (52)$$

и

$$E z_{-\infty}^* (z^2) = g^{-1} E_{-\infty}^{t_0} (t^2) + 2 \hat{\beta} \omega g^{-1/2} E_{-\infty}^{t_0} (t) + (\hat{\beta} \omega)^2 F (t_0). \quad (53)$$

С помощью формул (52) и (53), а также применяя леммы 9.1 и 9.2, можно показать (после некоторых алгебраических преобразований), что заключенная в квадратные скобки часть (51) равна

$$\left[\frac{-t_0 (\nu + t_0^2)}{g (\nu - 2)} - \frac{2 \hat{\beta} \omega (\nu + t_0^2)}{\sqrt{g} (\nu - 1)} + \frac{2 z^* (\nu + t_0^2)}{\sqrt{g} (\nu - 1)} \right] f (t_0) + \left[(\hat{\beta} \omega)^2 - 2 z^* \hat{\beta} \omega + (z^*)^2 + \frac{\nu}{g (\nu - 2)} \right] F (t_0). \quad (54)$$

Подстановка выражения (54) в (51) и дает (после упрощения) формулу (19), где

$$E (z - z^*) = \text{var} (z) + [z^* - E (z)]^2 = \frac{\nu}{g (\nu - 2)} + (z^* - \hat{\beta} \omega)^2.$$

БИБЛИОГРАФИЯ

1. A g a r o s A. M. and L. E. G a l l a w a y (1970). Defense profits and the renegotiation board in the aerospace industry, *Journal of Political Economy* 78, 1093—1105.
2. A h l b e r g J. H., E. N. N i l s o n and J. L. W a l s h (1967). The theory of splines and their applications (Academic Press, New York).
3. A i g n e r D. J. and A. S. G o l d b e r g e r (1973). A note on the explanatory power of dummy variable regressions, unpublished manuscript, University of Wisconsin.
4. A i g n e r D. J., T. A m e m i y a and D. J. P o i r i e r (1976). On the estimation of production frontiers: Maximum likelihood estimation of the parameters of a discontinuous density function, *International Economic Review*, forthcoming.
5. A l m o n S. (1965). The distributed lag between capital appropriations and expenditures, *Econometrica* 33, 178—196.
6. A m e m i y a T. (1974). A note on a Fair and Jaffee model, *Econometrica* 42, 759—762.
7. A m e m i y a T. and K. M r i m u n e (1974). Selecting the optimal order of polynomial in the Almon distributed lag, *Review of Economics and Statistics* 56, 378—386.
8. A n d o A. (1971). On a problem of aggregation, *International Economic Review* 12, 306—311.
9. A v e r y R. B. (1975). Monetary policy as an endogenous variable, unpublished manuscript, University of Wisconsin.
10. B a c o n D. W. and D. G. W a t t s. Estimating the transition between two intersecting straight lines, *Biometrika* 58, 525—534.
11. B a l H. S., R. D. H i c k m a n and R. G e t t y (1969). Age changes in the weight of the ovary in swine, *Journal of Gerontology* 24, 157—162.
12. B a r r o n d a l e I. and A. Y o u n g (1966). A note on numerical procedures for approximation by spline functions, *Computer Journal* 9, 318—320.

13. Barzel Y. (1972). The rate of technical progress: the «Indianapolis 500», *Journal of Economic Theory* 4, 72—81.
14. Barth J., A. Kraft and J. Kraft (1974). A new approach to measuring the interest elasticity of the demand for money, unpublished manuscript.
15. Behoodian J. (1972). On the distribution of a symmetric statistic from a mixed population. *Technometrics* 14, 919—923.
16. Bellman R. and R. Roth (1969). Curve fitting by segmented straight lines, *Journal of the American Statistical Association* 64, 1079—1084.
17. Belsley D. A. (1973a). On the determination of systematic parameter variation in the linear regression model, *Annals of Economic and Social Measurement* 2, 487—494.
18. Belsley D. A. (1973b). A test for systematic variation in regression coefficients, *Annals of Economic and Social Measurement* 2, 495—499.
19. Belsley D. A. (1973c). The applicability of the Kalman filter in the determination of systematic parameter variation, *Annals of Economic and Social Measurement* 2, 531—533.
20. Bhattacharya G. K. and R. A. Johnson (1968). Nonparametric test for shift at unknown time point, *Annals of Mathematical Statistics* 39, 1731—1743.
21. Blischke W. R. (1961). Least squares of two intersecting lines, Technical Report no. 7, Department of the Navy, ONR, Cornell University.
22. Boneva L. I., D. G. Kendall and L. Stefanov (1971). Spline transformations: Three diagnostic aids for the statistical data-analyst (with discussion), *Journal of the Royal Statistical Society* 33, 1—71.
23. Bosson J. (1974). A general functional form for the relationships involving limited dependent variables, Institute for the Quantitative Analysis of Social and Economic Policy Working Paper no. 7407, University of Toronto.
24. Bowman H. W. (1973). The symmetry problem in decision theory, unpublished manuscript, University of Illinois at Chicago Circle.
25. Box G. E. P. and D. R. Cox (1964). An analysis of transformations, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 26, 211—243.
26. Britney R. R. and R. L. Winkler (1968). Bayesian point estimation under various loss functions, Proceedings of the American Statistical Association, 356—364.
27. Brown R. L. and J. Durbin (1968). Methods of investigating whether a regression relationship is constant over time. *Mathematical Centre Tracts* 26, 37—45.
28. Cargill T. F. and R. A. Meyer (1974). Some time and frequency domain distributed lag estimators: A comparative Monte Carlo study, *Econometrica* 42, 1031—1044.
29. Chernoff H. and S. Zacks (1964). Estimating the current mean of a normal distribution which is subjected to change in time, *Annals of Mathematical Statistics* 35, 999—1018.
30. Chetty V. K. (1971). Estimation of Solow's distributed lag models, *Econometrica* 39, 99—117.
31. Chow G. (1960). Tests of the equality between two sets of coefficients in two linear regressions, *Econometrica* 28, 591—605.
32. Clark P. K. (1974). Operational time and seasonality in distributed lag estimation, manuscript 32 (National Bureau of Economic Research, Cambridge).
33. Cobb C. W. and P. H. Douglas (1928). A theory of production, Proceedings Supplement of the *American Economic Review* 18, 138—165.
34. Cohen M., R. Gillingham and D. Heien (1973). A Monte Carlo study of complex finite distributed lag structures, *Annals of Economic and Social Measurement* 2, 53—63.
35. Connor R. J. (1972). Grouping for testing trends in categorical data, *Journal of the American Statistical Association* 67, 543—547.
36. Cooley T. D. and E. Prescott (1973). Varying parameter regression: A theory and some applications. *Annals of Economic and Social Measurement* 2, 463—473.
37. Cooper J. P. (1972). Two approaches to polynomial distributed lags estimation: An expository note and comment, *American Statistician*, 32—35.

38. Cooper J. P. (1973). Time varying regression coefficients: A mixed estimation approach and operational limitations of the general Markov structure, *Annals of Economic and Social Measurement* 2, 525—530.
39. Cox D. R. (1957). Note on grouping, *Journal of the American Statistical Association* 52, 543—547.
40. Day N. E. (1969). Estimating the components of a mixture of normal distributions, *Biometrika* 56, 463—474.
41. de Boor C. E. (1962). Bubic spline interpolation, *Journal of Mathematics and Physics* 61, 212—218.
42. de Boor C. E. and J. R. Rice (1968a). Least squares cubic spline approximation I — fixed knots, Computer Science Department, Division of Mathematical Sciences, CSD TR 20, Purdue University.
43. de Boor C. E. and J. R. Rice (1968b). Least squares cubic spline approximation II — variable knots, Computer Science Department, Division of Mathematical Sciences, CSD TR 21, Purdue University.
44. D h r y m e s P. J. (1971). Distributed lags: Problems of estimation and formulation (Holden-Day, San Francisco).
45. E i s n e r R. and R. S t r o t z (1963). Determinants of business investment (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey).
46. F a i r R. C. and D. M. J a f f e e (1972). Methods of estimation for markets in disequilibrium, *Econometrica* 40, 497—514.
47. F a i r R. C. and H. H. K e l e j i a n (1974). Methods of estimation for markets in disequilibrium — a further study, *Econometrica* 42, 177—190.
48. F a r l e y J. V. and M. J. H i n i c h. (1970a). Detecting «small» mean shifts in time series, *Management Science* 17, 189—200.
49. F a r l e y J. V. and M. J. H i n i c h (1970b). A test for a shifting slope coefficient in a linear model, *Journal of the American Statistical Association* 65, 1320—1329.
50. F a r l e y J. V., M. J. H i n i c h and T. W. M c G u i r e (1971). Testing for a shift in the slopes of a multivariate linear time series model, Working Paper 77-70-1, Carnegie Mellon University.
51. F a r l e y J. V., M. J. H i n i c h and T. W. M c G u i r e (1975). Some comparisons of tests in the slopes of a multivariate linear time series model, *Journal of Econometrics* 3, 297—318.
52. F e d e r P. I. (1967). On the likelihood ratio statistic with applications to broken line regression, Technical Report no. 23, Department of Statistics, Stanford University.
53. F e d e r P. I. (1970). On asymptotic distribution theory in segmented regression problems — identified case, Statistics Department Technical Report, Yale University.
54. F e d e r P. I. (1975a). On asymptotic distribution theory in segmented regression problems — identified case. *Annals of Statistics* 3, 49—83.
55. F e d e r P. I. (1975b). The log likelihood ratio in segmented regression, *Annals of Statistics*, 3, 84—97.
56. F e d e r P. I. and D. L. S y l w e s t e r (1968). On the asymptotic theory of least squares estimation in segmented regression: Identified case (abstract), *Annals of Mathematical Statistics* 39, 1362.
57. F e i g e E. L. (1967). Expectations and adjustments in the monetary sector, *American Economic Review* 57, 462—473.
58. F e r r e i r a P. E. (1975). A Bayesian analysis of a switching regression model: Known number of regimes, *Journal of the American Statistical Association* 70, 370—374.
59. F e l l n e r W. (1969). Specific interpretation of learning by doing, *Journal of Economic Theory* 1, 119—140.
60. F i s h e r F. M. (1970). Tests of equality between sets of coefficients in two linear regressions: An expository note, *Econometrica* 38, 361—366.
61. F i s h e r I. (1937). Note on a short-cut method for calculating distributed lags, *Bulletin de l'Institut International de Statistique* 29, 323—327.
62. F r i e d m a n M. (1972). The case for a monetary rule. *Newsweek*, February 7, 67.

63. Friedman M. and D. Meiselman (1963). The relative stability of monetary velocity and the investment multiplier in the United States, 1897—1958, in *Stabilization Policies*, Commission on Money and Credit Research Study (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey).
64. Fuller W. A. (1969). Grafted polynomials as approximating functions, *Australian Journal of Agricultural Economics* 13, 35—46.
65. Gallant A. R. (1971). Statistical inference for nonlinear regression models, unpublished dissertation, Iowa State University.
66. Gallant A. R. (1973). Inference for nonlinear models, Institute of Statistics Mimeograph Series no. 875, North Carolina State University.
67. Gallant A. R. (1975a). The power of the likelihood ratio test of location in nonlinear regression models, *Journal of the American Statistical Association* 70, 198—203.
68. Gallant A. R. (1975b). Testing for the location of a subset of the parameters of a nonlinear regression model, *Journal of the American Statistical Association* 70, 927—932.
69. Gallant A. R. (1975c). Confidence intervals for the parameters of a nonlinear regression model, invited paper, American Statistical Association Annual Meeting, Atlanta, Georgia.
70. Gallant A. R. and W. A. Fuller (1973). Fitting segmented polynomial regression models whose joint points have to be estimated, *Journal of the American Statistical Association* 68, 144—147.
71. Gardner L. A. (1969). On detecting changes in the mean of normal variates, *Annals of Mathematical Statistics* 49, 11—126.
72. Gaver K. M. and M. S. Geisel (1974). Discriminating among alternative models: Bayesian and non-Bayesian methods.—In: P. Zarembka, ed., *Frontiers of Econometrics* (Academic Press, New York).
73. Goldfeld S. M., H. H. Kellejian and R. E. Quandt (1971). Least squares and maximum likelihood estimation of switching regressions, Econometric Research Program, Research Memorandum no. 130, Princeton University.
74. Goldfeld S. M. and R. E. Quandt (1972). Nonlinear methods in econometrics (North-Holland, Amsterdam).
75. Goldfeld S. M. and R. E. Quandt (1973a). The estimation of structural shifts by switching regressions, *Annals of Economic and Social Measurement* 2, 475—485.
76. Goldfeld S. M. and R. E. Quandt (1973b). A Markov model for switching regressions, *Journal of Econometrics* 1, 3—16.
77. Goldfeld S. M. and R. E. Quandt (1974). Estimation in a disequilibrium model and the value of information, unpublished manuscript.
78. Green W. H. (1974). Factor substitutions and returns to scale in electrical supply, unpublished manuscript, University of Wisconsin.
79. Greville T. N. E. (1968). Theory and applications of spline functions (Academic Press, New York).
80. Griliches Z. (1967). Distributed lags: A survey, *Econometrica* 35, 16—49.
81. Guthery S. B. (1974). Partition regression, *Journal of the American Statistical Association* 69, 945—947.
82. Halpern E. F. (1973a). Bayesian spline regression when the number of knots is unknown, *Journal of the Royal Statistical Society* 35, Series B, 347—360.
83. Halpern E. F. (1973b). Polynomial regression from a Bayesian approach, *Journal of the American Statistical Association* 68, 137—143.
84. Handscomb D. C. (1966). Spline functions.—In: D. C. Handscomb, ed., *Methods of numerical approximation* (Pergamon Press, Oxford).
85. Hartley H. O. (1961). The modified Gauss—Newton method for the fitting of nonlinear regression functions by least square, *Technometrics* 3, 269—280.
86. Hartley H. O. (1964). Exact confidence regions for the parameters in nonlinear regression laws, *Biometrika* 51, 347—353.

87. H a r t l e y M. J. (1973). On the estimation of markets in disequilibrium, Economics Department Discussion Paper no. 275, State University of New York at Buffalo.
88. H a r t l e y M. J. and P. M a l l e l a (1975). The asymptotic properties of a maximum likelihood estimator for a model of markets in disequilibrium, Discussion Paper no. 329 (revised), State University of New York at Buffalo.
89. H e n d r i c k s W. (1973). The effect of market structure on union wage levels in U. S. manufacturing, unpublished manuscript, University of Illinois.
90. H i n k l e y D. V. (1969a). Problem associated with points of discontinuity, unpublished dissertation, London University.
91. H i n k l e y D. V. (1969b). Inference about the intersection in two-phase regression, *Biometrika* 56, 495—504.
92. H i n k l e y D. V. (1970). Inference about the change-point in a sequence of random variables, *Biometrika* 57, 1—17.
93. H i n k l e y D. V. (1971). Inference in two-phase regression, *Journal of the American Statistical Association* 66, 736—743.
94. H i n k l e y D. V. (1972). Time ordered classification, *Biometrika* 59, 509—523.
95. H o l t C. C. (1962). Linear decision rules for economic stabilization and growth, *Quarterly Journal of Economics* 76, 20—45.
96. H o r n e r D. (1973). The impact of negative taxes on the labor supply of low-income male family heads. — In: H. W. Watts and A. Rees, eds., Final Report of the New Jersey graduated work incentive experiment (Institute for Research on Poverty, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin).
97. H o s m e r Jr., D. W. (1973). On MLE of the parameters of a mixture of two normal distributions when the sample is small, *Communications in Statistics*, 1, 217—227.
98. H u d s o n D. J. (1966). Fitting segmented curves whose join points have to be estimated, *Journal of the American Statistical Association* 61, 1097—1125.
99. J e n n r i c h R. I. (1969). Asymptotic properties of non-linear least squares estimators, *Annals of Mathematical Statistics* 40, 633—645.
100. K a n d e r Z. and S. Z a c k s (1966). Test procedures for possible changes in parameters of statistical distributions occurring at unknown time points, *Annals of Mathematical Statistics* 37, 1196—1210.
101. K e r s h a w D. (1971). A note on the convergence of interpolating cubic splines, *SIAM Journal of Numerical Analysis* 8, 67—74.
102. K e r s h a w D. (1969). The explicit inverses of two commonly occurring matrices, *Mathematics of Computation* 22, 189—191.
103. K e r s h a w D. (1970). Inequalities of the inverse of a certain tridiagonal matrix, *Mathematics of Computation* 24, 155—168.
104. K i e f e r J. and J. W o l f o w i t z (1956). Consistency of the maximum likelihood estimator in the presence of infinitely many nuisance parameters, *Annals of Mathematical Statistics* 27, 887—906.
105. K i m e l d o r f G. S. and G. W a h b a (1970). A correspondence between Bayesian estimation on stochastic processes and smoothing by splines, *Annals of Mathematical Statistics* 55, 371—380.
106. L e a m e r E. E. (1972). A class of informative priors and distributed lag analysis, *Econometrica* 40, 1059—1081.
107. L i n d l e y D. V. (1968). The choice of variables in multiple regression, *Journal of the Royal Statistical Society* 30, Series B, 31—53.
108. M e C u l l o c h J. H. (1971). Measuring the term structure of interest rates, *Journal of Business of the University of Chicago* 44, 19—31.
109. M e C u l l o c h J. H. (1975). The tax-adjusted yield curve, *Journal of Finance*, forthcoming.
110. M e G e e V. E. and W. T. C a r l e t o n (1970). Piecewise regression, *Journal of the American Statistical Association* 65, 1109—1124.
111. M a c d o n a l d P. D. M. (1975). Estimation of finite distribution mixtures. — In: R. P. Gupta, ed., Applied statistics (North-Holland, Amsterdam).
112. M a d d a l a G. S. and F. D. N e l s o n (1974). Maximum likelihood methods for models of markets in disequilibrium, *Econometrica* 42, 1013—1030.
113. M a e k a w a K. (1975). An asymptotic test for structural change in simultaneous equation_system, Paper presented at the Third World Congress of the

- Économetric Society, Toronto.
114. Malinvaud E. (1966). Statistical methods of econometrics (Rand McNally, Chicago).
 115. Malinvaud E. (1970). The consistency of nonlinear regression, *Annals of Mathematical Statistics* 41, 956—969.
 116. Marquardt D. W. (1963). An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters, *S. I. A. M. Journal* 11, 431—441.
 117. Marshall A. (1890). Principles of economics, an introductory volume (Macmillan, London).
 118. Mehta J. S. and P. A. V. B. S w a m y (1974). The exact finite sample distribution of Theil's compatibility test statistic and its application, *Journal of the American Statistical Association* 69, 154—158.
 119. Modigliani F. and R. J. Shiller (1973). Inflation, rational expectations and the term structure of interest rates, *Economica*, 12—43.
 120. Mouchart M. and R. Orsi (1974). Polynomial approximation of distributed lags and linear restrictions: A Bayesian approach, manuscript 7411, CORE Discussion Paper, Louvain.
 121. Nerlove M. (1963). Returns to scale in electricity supply. — In: C. Christ, ed., Measurement in economics (Stanford University Press, Stanford) 167—198.
 122. Nerlove M. (1971). On lags in economic behavior, *Econometrica* 40, 221—252.
 123. Page E. S. (1954). Continuous inspection schemes, *Biometrika* 41, 100—114.
 124. Page E. S. (1955). A test for a change in a parameter occurring at an unknown point, *Biometrika* 42, 523—527.
 125. Page E. S. (1957). On problems in which a change in parameter occurs at an unknown point, *Biometrika* 44, 248—252.
 126. Pennington R. H. (1965). Introductory computer methods and numerical analysis (MacMillan, New York).
 127. Poirier D. J. (1973a). Piecewise regression using cubic splines. *Journal of the American Statistical Association* 68, 515—524.
 128. Poirier D. J. (1973b). Applications of spline functions in economics, Ph. D. Dissertation (Department of Economics, University of Wisconsin at Madison).
 129. Poirier D. J. (1975a). On the use of bilinear splines in economics. *Journal of Econometrics* 3, 23—24.
 130. Poirier D. J. (1975b). On the use of Cobb — Douglas splines, *International Economic Review* 16, 733—744.
 131. Poirier D. J. (1975c). Spline functions and their applications in regression analysis. — In: H. W. Watts and A. Rees, eds., Labor supply responses to experimental negative income tax payments (Academic Press, New York).
 132. Poirier D. J. and S. G. Garber (1974). The determinants of aerospace profit rates, 1951—71. *Southern Economic Journal* 41, 228—238.
 133. Poirier D. J. and H. W. Watts (1973). The measurement of wage rates. — In: New Jersey graduated work incentive experiment final report (Institute for Research on Poverty, University of Wisconsin, Madison).
 134. Powell M. J. D. (1968). On best L_2 spline approximations, *Numerische Mathematik, Differentialgleichungen, Approximationstheorie* 9, 317—339.
 135. Powell M. J. D. (1969). The local dependence of least square cubic splines, *SIAM Journal of Numerical Analysis* 6, 398—413.
 136. Quandt R. E. (1958). The estimation of the parameters of a linear regression system obeying two separate regimes, *Journal of the American Statistical Association* 53, 873—880.
 137. Quandt R. E. (1960). Tests of the hypothesis that a linear regression system obeys two separate regimes, *Journal of the American Statistical Association* 55, 324—330.
 138. Quandt R. E. (1972). A new approach to estimating switching regressions, *Journal of the American Statistical Association* 67, 306—310.
 139. Quandt R. E. (1974). A comparison of methods for testing nonnested hypotheses, *Review of Economics and Statistics* 56, 92—99.

140. Raiffa H. and R. Schlaifer (1961). Applied statistical decision theory (Harvard Graduate School of Business Administration, Cambridge). Русский перевод: Райфа Г., Шлейфер Р. Прикладная теория статистических решений. М., Статистика, 1977.
141. Ramsey J. B. (1974). The maximum likelihood estimation of parameters contained within finitely bounded compact sets: Some preliminary results, *Econometrics Workshop Paper no. 7401* (revised Jan. 1975), Michigan State University.
142. Ramsey J. B. (1975). Mixtures of distributions and maximum likelihood estimation of parameters contained in finitely bounded compact spaces, *Econometrics Workshop Paper no. 7501*. Michigan State University.
143. Rees A. (1974). An overview of the labor-supply results, *Journal of Human Resources* 9, 158—180.
144. Rice J. R. (1969). Nonlinear and multivariate theory, Volume II of *The Approximation of Functions* (Addison — Wesley, Reading, Massachusetts).
145. Robinson D. E. (1964). Estimates for the points of intersection of two polynomial regressions, *Journal of the American Statistical Association* 59, 214—224.
146. Schmidt P. and R. N. Waud (1973). Almon lag technique and the monetary versus fiscal policy debate, *Journal of the American Statistical Association* 68, 11—19.
147. Schoenberg I. J. (1946). Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, Parts I and II, *Quarterly Journal of Applied Mathematics* 4, 45—99 and 112—141.
148. Schoenberg I. J. (1967). On spline functions. — In: O. Shisha, ed., *Inequalities* (Academic Press, New York).
149. Schoenberg I. J. (1972). Splines and histograms with an appendix by Carl de Boor, Mathematics Research Center Technical Summary Report no. 1273, University of Wisconsin.
150. Sen A. and M. S. Srivastava (1975). On tests for detecting change in mean, *Annals of Statistics* 3, 98—108.
151. Shiller R. J. (1973). A distributed lag estimator derived from smoothness priors, *Econometrica* 41, 775—788.
152. Sims C. A. (1971). Discrete approximations to continuous time distributed lags in econometrics, *Econometrica* 39, 545—563.
153. Sims C. A. (1973). Distributed lags.— In: M. D. Intriligator and D. A. Kendrick, eds., *Frontiers of quantitative economics*, vol. II (North-Holland, Amsterdam).
154. Skidmore F. (1973). Design and implementation of the experiment, unpublished manuscript, University of Wisconsin.
155. Spahn P. B. (1974). Simulating long-term changes of income distribution within an income tax model for Western Germany, unpublished manuscript Harvard University.
156. Sprent P. (1961). Some hypotheses concerning two-phase regression lines, *Biometrics* 17, 634—645.
157. Stephenson J. A. and H. T. Farr (1972). Seasonal adjustment of economic data by application of the general linear statistical model, *Journal of the American Statistical Association* 67, 37—45.
158. Suits D. (1965). An econometric model of the watermelon market, *Journal of Farm Economics* 37, 237—251.
159. Swamy P. A. V. B. (1971). Statistical inference in random coefficient regression models (Springer, New York).
160. Swamy P. A. V. B. and J. S. Mehta (1973). Bayesian and non-Bayesian analysis of switching regressions and of random coefficient regression models, *Journal of the American Statistical Association*, forthcoming.
161. Sylwester D. L. (1965). On the maximum likelihood estimation for two-phase linear regression, unpublished dissertation, Stanford University.
162. Taylor W. E. (1974). Smoothness priors and stochastic prior restrictions in distributed lag estimation, *International Economic Review* 15, 803—804.
163. Theil H. (1963). On the use of incomplete prior information in regression analysis, *Journal of the American Statistical Association* 58, 401—414.

164. Theil H. (1971). Principles of econometrics (John Wiley, New York).
165. Theil H. and A. S. Goldberger (1961). On pure and mixed statistical estimation in economics, *International Economic Review* 2, 65—78.
166. Tsurumi H. (1975). A Bayesian test of the product cycle hypothesis applied to Japanese crude steel production, unpublished manuscript, Rutgers University.
167. Wahba G. (1975a). Optimal convergence properties of variable knot, kernel, and orthogonal series methods for density estimation, *Annals of Statistics* 3, 15—29.
168. Wahba G. (1975b). Interpolating spline methods for density estimation I: Equi-spaced knots, *Annals of Statistics* 3, 30—48.
169. Wahba G. and S. World (1974). Periodic splines for spectral density estimation: The use of cross validation for determining the degree of smoothing, Department of Statistics Technical Report no. 381, University of Wisconsin.
170. Watts H. W. (1973a). The measurement of normal family income. — In: New Jersey graduated work incentive experiment final report (Institute for Research on Poverty, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin).
171. Watts H. W. (1973b). Labor-supply response of married men. — In: H. W. Watts and A. Rees, eds., New Jersey graduated work incentive experiment final report (Institute for Research on Poverty, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin).
172. Watts H. W. (1973c). Parameterization of the experimental treatment — In: New Jersey graduated work incentive experiment final report (Institute for Research on Poverty, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin).
173. Watts H. W. and A. Rees (1975a). eds. Labor supply responses to experimental negative income tax payments (Academic Press, New York).
174. Watts H. W. and A. Rees (1975b). eds. Impact of experimental payments on expenditure, health, and social behavior, and studies on the quality of the evidence (Academic Press, New York).
175. Waud R. N. (1966). Small sample bias due to misspecification in the «partial adjustment» and «adaptive expectations» models, *Journal of the American Statistical Association* 61, 1130—1152.
176. Williams D. A. (1970). Discrimination between regression models to determine the pattern of enzyme synthesis in synchronous cell structures, *Biometrics* 26, 23—32.
177. Wilton D. A. (1972). Structural shift with an inter-structural transition function, Discussion Paper 92, Institute for Economic Research, Queens University.
178. Winkler R. L., G. Roodman and R. B. Britney (1972). The determination of partial moments, *Management Science* 3, 290—296.
179. World S. (1974) Spline functions in data analysis, *Technometrics* 16, 1—11.
180. Yancey T. A., M. E. Bosk and G. G. Judge (1972). Some finite sample results for Theil's mixed regression estimator, *Journal of the American Statistical Association* 67, 176—179.
181. Zellner A. (1971). An introduction to Bayesian inference in econometrics (Wiley, New York). Русский перевод: Зельнер А. Байесовские методы в эконометрии. М., Статистика, 1980.
182. Zellner A. and M. S. Geisel (1968). Sensitivity of control to uncertainty and form of the criterion function. — In: D. G. Watts, ed., The future of statistics (Academic Press New York) 269—283.

● О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие к русскому изданию	5
Глава 1. Введение	13
Глава 2. Линейные сплайны	20
2.1. Математическая формулировка	20
2.2. Практическое приложение к оценке нормы прибыли в авиакосмической промышленности за 1951—1971 гг.	23
Глава 3. Кубические сплайны	30
3.1. Математическая формулировка	30
3.2. Кубические сплайны и метод наименьших квадратов	34
3.3. Случай ортогональности преобразованных переменных	36
3.4. Интервалы прогнозирования	38
3.5. Проверка гипотез о наличии линейных и квадратичных кусков	39
3.6. Проверка гипотезы о наличии структурного изменения	40
3.7. Практическое приложение к модели «обучения на опыте»	42
3.8. Альтернативные граничные условия	45
3.9. Периодические кубические сплайны	48
3.10. Вычисление $\Lambda^{-1}\Theta$ в некоторых частных случаях	51
3.11. Альтернативное представление $S_{\Delta}(x)$	52
3.12. Свойство наилучшего приближения	52
3.13. Оптимальная траектория роста объема денежной массы при наличии целевых ограничений	54
3.14. Приложение.	57
Глава 4. Билинейные сплайны	58
4.1. Введение	58
4.2. Математическое определение	60
4.3. Проверка наличия структурных изменений	63
4.4. Практическое применение билинейных сплайнов в уравнениях, описывающих величину ставки-заработной платы среди негритянского населения мужского пола	65
4.5. Обсуждение	60
Глава 5. Сплайны Кобба — Дугласа	70
5.1. Введение	70
5.2. Определение сплайна Кобба — Дугласа	71
5.3. Сплайновая производственная функция Кобба — Дугласа	72
5.4. Сплайновая функция полезности Кобба — Дугласа	77
5.5. Приложение к задаче о производстве электроэнергии	79
Глава 6. Сплайны в теории запаздывания: почему оказалось неудачным запаздывание Алмон	82
6.1. Введение	82
6.2. Первая мотивировка: гладкость	84
6.3. Вторая мотивировка: переменная величина запаздывания	87

6.4. Сравнение робастности запаздывания Алмон и сплайнового запаздывания.	89
6.5. Практическое приложение к задаче о доходности корпоративных облигаций	96
6.6. Заключение	99
6.7. Приложение	101
Глава 7. Обзор процедур оценивания для моделей с неизвестным расположением точек структурного изменения	102
7.1. Введение	102
7.2. Регрессионные модели с переключением	103
7.3. Регрессионные модели со сплайнами	111
7.4. Байесовский анализ	124
7.5. Заключение	134
Глава 8. Применение сплайнов в рамках множественной регрессии	136
8.1. Введение	136
8.2. Различные варианты параметризации	136
8.3. Точная мультиколлинеарность	137
8.4. Модели с параметрами, изменяющимися во времени	138
8.5. Выбор расположения узлов	141
8.6. Программы для ЭВМ	145
Глава 9. Сплайновые функции потерь	151
9.1. Сплайновые функции потерь, рассмотренные в предыдущих главах	151
9.2. Квадратичная сплайновая функция потерь	152
9.3. Асимметричная функция потерь в теории оптимального управления	154
9.4. Робастность квадратичной функции потерь в задачах оптимального управления	158
9.5. n -мерные квадратичные сплайновые функции потерь	161
9.6. Биквадратичные сплайновые функции потерь	165
9.7. Асимметричные модели частичной адаптации	167
9.8. Приложение	173
Библиография	174

Пуарье Д.

П88 Эконометрия структурных изменений: (С применением сплайн-функций) / Пер. с англ. В. В. Минахина; Под ред. Г. Г. Пирогова. — М.: Финансы и статистика, 1981. — 183 с., ил. — (Математико-статистические методы за рубежом).

В пер.: 1 р. 40 к.

В книге рассматривается проблема построения модели, в которой можно отразить изменения, постоянно происходящие в экономических объектах. Предложены новые идеи для построения регрессионной модели, отражающей изменения, происходящие в объектах изучения. Разбираются линейные, кубические, билинейные кусочно-трендовые регрессии, кусочные функции Кобба—Дугласа, проблема запаздывания Алмон.

Для специалистов, занимающихся построением эконометрических моделей и прогнозированием

П $\frac{10805^*-086}{010(01)-81}$ 44—81 (С) 0702000000 1702060000

ББК 22.172
517.8

* Второй индекс 10803.

Д. Пуарье

ЭКОНОМЕТРИЯ СТРУКТУРНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ

*Книга одобрена на заседании редколлегии серии
«Математико-статистические методы за рубежом»
27/ХІІ-1978 г.*

Зав. редакцией *А. В. Павлоков*

Редактор *Е. В. Крестьянинова*

Мл. редактор *О. Б. Степанченко*

Техн. редактор *И. В. Завгородняя*

Корректоры *Я. Б. Островский, Т. М. Иванова*

Худож. редактор *Э. А. Смирнов*

Обложка художника *Т. Н. Погореловой*

ИБ № 907

Сдано в набор 29.10.80. Подписано в печать 30.06.81.

Формат 60×90^{1/16} Бум. кн.-журн. Гарнитура «Литературная». Печать высокая.

П. л. 11,5. Усл. п. л. 11,5. Усл. кр.-отт. 11,75. Уч.-изд. л. 12,75. Тираж 6000 экз.

Заказ 2220. Цена 1 р. 40 к.

Издательство «Финансы и статистика», ул. Чернышевского, 7

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома

при Государственном комитете СССР

по делам издательств, полиграфии и книжной торговли

129041, Москва, Б. Переяславская ул., д. 46